Università degli Studi di Roma "La Sapienza"
Corsi di laurea in Ing. Meccanica e Ing. Elettrica

Corso di Fisica Generale I
Proff. Marco Rossi e Concita Sibilia

Soluzioni della prova di esame del 21 aprile 2012
appello *straordinario- a.a. 2011-12*

E1) Legge oraria del bersaglio e del proiettile:

$$\text{Bersaglio}: \begin{cases} x_b(t) = v_0 t \\ y_b(t) = h \end{cases} \qquad \text{Proiettile}: \begin{cases} x_p(t) = v\cos\alpha t \\ y_p(t) = v\sin\alpha t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Affinché il proiettile colpisca il bersagli al tempo t_1 deve essere:

$$x_b(t_1) = x_p(t_1) \quad \Rightarrow \quad v_0 t_1 = v\cos\alpha t_1 \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{v_0}{v}$$

$$y_b(t_1) = y_p(t_1) \quad \Rightarrow \quad h = v\sin\alpha t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

derivando si ottiene:

$$0 = v\sin\alpha - gt_1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{v\sin\alpha}{g} \quad \Rightarrow h = v\sin\alpha\left(\frac{v\sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v\sin\alpha}{g}\right)^2 = \left(\frac{v^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$$

e sfruttando le relazione fondamentale della trigonometria:

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{2gh}{v^2}\right) + \left(\frac{v_0}{v}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh + v_0^2} = 121.6 \ m/s \ , \ \alpha = 46.7°$$

E2)

In assenza di attrito si conserva l'energia meccanica del sistema, per cui:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mgR(1-\sin\theta)$$

Inoltre, il punto materiale percorre una traiettoria circolare fin quando rimane sulla calotta, per cui proiettando lungo la direzione normale e tangenziale alla traiettoria, si ha:

$$m\mathbf{g} + \mathbf{R}_N = m\mathbf{a}$$

$$mg\cos\theta = ma_t \qquad \text{lungo la dir. tangenziale}$$

$$mg\sin\theta - R_N = ma_n = m\frac{v^2}{R} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)\frac{2}{R} = 2mg(1-\sin\theta) \ \text{ lungo la dir. normale}$$

Affinché il punto materiale rimanga sulla calotta sferica, si deve avere R_N>0. Al momento del distacco si avrà R_N=0, cioè:

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) ; \ 41.8°$$

$$d = R\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 25.2cm$$

E3) Le forze interne al sistema non alterano il momento angolare totale e quindi per la conservazione del momento della quantità di moto totale del sistema:

$$I_1\omega_{iniziale} = (I_1 + I_2)\omega_{finale} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{finale} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_{iniziale}$$

da cui, sapendo che il momento d'inerzia di un disco è pari a:

$$I_{disco} = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}\rho V R^2 = \frac{1}{2}\rho d(\pi R^2)R^2 = \frac{1}{2}\rho d\pi R^4$$

si ottiene per la velocità angolare finale:

$$\omega_{finale} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}\omega_{iniziale} = \frac{1}{1+\left(\frac{I_2}{I_1}\right)}\omega_{iniziale} = \frac{1}{1+\left(\frac{R_2^4}{R_1^4}\right)}\omega_{iniziale} = \frac{R_1^4}{R_1^4 + R_2^4}\omega_{iniziale} = 26.2\ rad/s$$

e per l'energia dissipata dalle forze interne:

$$\Delta E = \frac{1}{2}I_1\omega^2_{iniziale} - \frac{1}{2}(I_1 + I_2)\omega^2_{finale} = \frac{1}{4}\rho d\pi[R_1^4\omega^2_{iniziale} - (R_1^4 + R_2^4)\omega^2_{finale}] = 75\ \text{J}$$

E4)

In condizioni di reversibilità il gas contenuto in *A* fa il minimo lavoro indispensabile a comprimere *B*.

a) $L_{AB} = nC_v(T_B - T_0) \quad ; \quad T_B = T_0\left(\frac{p_o}{p_B}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 466\ K \quad \Rightarrow \quad L_{AB} = 1.2\cdot 10^4 J$

b) $V_A = 2V_0 - V_B = V_0\left[2-\left(\frac{p_o}{p_B}\right)^{1/\gamma}\right] \quad ; \quad T_A = T_0\frac{p_B}{p_o}\left[2-\left(\frac{p_o}{p_B}\right)^{1/\gamma}\right] = 1334\ K$

essendo V_0 il volume iniziale di ciascun gas.

$$Q = \tfrac{3}{2}nR(T_B - T_0) + \tfrac{3}{2}nR(T_A - T_0) = 89.7kJ$$

E5) $\Delta S_{universo} = \Delta S_{gas} + \Delta S_{sorgente}$, ma il primo termine è nullo perché il gas compie un ciclo. Quindi:

$$\Delta S_{universo} = \Delta S_{sorgente} = -\frac{Q_{gas}^{isoterma}}{T} = \frac{nRT\ln(V_B/V_A)}{T} = 2R\ln(3)\ ;\ 18.3\ \text{J/K}$$