Lezioni 2019-2020 Analisi Matematica 2 per Ingegneria Gestionale Secondo canale dott. Enrico Bersani

Testo di riferimento: Bramanti M, Pagani CD & Salsa S. *Analisi matematica 2*. Zanichelli Edizione del 2007

Parte Prima

Richiami del programma di Analisi I. Spazi metrici: distanza e sue proprietà, intorni, punti interni, punti esterni, punti di frontiera. Insiemi aperti, insiemi chiusi, insiemi limitati, insiemi convessi. Unioni tra due spazi metrici. Punti di accumulazione, limiti. Casi particolari: funzioni reali di una variabile reale, funzioni reali di due variabili reali, funzioni vettoriali di una variabile reale. Calcolo differenziale per le funzioni di due variabili reali. Derivate parziali, derivata direzionale, differenziabilità e proprietà delle funzioni differenziabili. Condizione sufficiente per la differenziabilità. Regola di derivazione delle funzioni composte. Derivate successive, teorema di Schwarz, matrice hessiana. **Capitolo 3,Sezioni 3.1, 3.3, 3.4 3.5**

Formula di Taylor del secondo ordine per le funzioni in due variabili (con resto di Peano e resto di Lagrange). Cenno alla formula di Taylor di ordine più elevato (**Capitolo 3, Sezione 5.2**). Forme quadratiche in due variabili (Capitolo 6, Sezione 6.3 e 6.4). Classificazione delle forme quadratiche. Teorema del segno delle forme quadratiche in due variabili. Test degli autovalori e del determinante. Metodo per le forme quadratiche di più di due variabili (metodo delle sotto-matrici principali di nord-ovest). **Capitolo 3, Sezioni 6.3 e 6.4**

Regola di derivazione delle funzioni composte. Derivate successive, teorema di Schwarz, matrice hessiana. Ottimizzazione. Estremi liberi. Definizione di punto di massimo, minino (globale e relativo, forte e debole) e di punto di sella. Condizione necessaria del primo ordine. **Capitolo 3, Sezioni 6.1 e 6.2**

Parte Seconda

Richiami di calcolo vettoriale. Funzioni a valori vettoriali. Limiti e continuità. Arco di curva continua; curva semplice e curva chiusa **Capitolo 2, Sezioni 1, 2, 3.1, 3.2**.

Arco di curva regolare, vettore tangente, versore tangente. Esercizi sulla parametrizzazione delle curve, verifica della regolarità. Curve rettificabili e lunghezza di una curva. Rettificabilità delle curve regolari e formula per il calcolo della lunghezza (senza dimostrazione). **Capitolo 3, Sezione 3.3**.

Equazioni parametriche delle rette tangenti. Cambiamento di parametrizzazione, curve equivalenti, ascissa curvilinea. Calcolo dell'ascissa curvilinea per la circonferenza e per l'elica cilindrica. Integrali curvilinei di prima specie. Significato geometrico. Invarianza degli integrali sotto parametrizzazioni equivalenti (dimostrazione facoltativa). Esercizi sul calcolo di lunghezze di curve e sugli integrali curvilinei. **Capitolo 2 Sezione 5**

Calcolo dell'ascissa curvilinea per la circonferenza e per l'elica cilindrica. Equazioni parametriche della retta tangente. Curve di livello di una funzione di due variabili. Ortogonalità del gradiente con le curve di livello. Funzioni implicite di una variabile, teorema del Dini (senza dimostrazione). Applicazione del teorema del Dini per lo sviluppo di Taylor di una funzione implicita. Esempio di linee di livello. **Capitolo 3, Sezione 1, Sezione 4.5 (pagina 137) e Sezione 8.1 del Capitolo 3**.

Teorema del Dini in n dimensioni. Ortogonalità della tangente ed il gradiente per le linee di livello. Massimi e minimi assoluti per una funzione in più variabili in insiemi compatti. Caso del vincolo chiuso non regolare. **Capitolo 3, Sezioni 1, Sezione 4.5 (pagina 137), Sezione 8.1**

Massimi e minimi vincolati e problemi di ottimizzazione con vincolo di uguaglianza. Lagrangiana e moltiplicatori di Lagrange. Applicazione al caso di due variabili. Cenni al caso generale. **Capitolo 4, Sezioni 6.1 e 6.2** (senza dimostrazioni)

Esercizi sul Teorema del Dini e su massimi e minimi assoluti di funzioni continue su compatti. Applicazione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange. **Capitolo 4 Sezione 6.1, 6.2 6.2 (pagina 237)**. Formula della derivata seconda per la funzione implicita (appunti)

Parte Terza

Equazioni differenziali ordinarie. Generalità. Equazioni del primo ordine in forma normale. Problema di Cauchy. Equivalenza tra il problema di Cauchy e l'equazione integrale (dimostrazione presa dal libro di Avantaggiati). Enunciato del Teorema di esistenza di una soluzione locale (Teorema di Peano). Condizione di Lipshitz. Teorema di esistenza ed unicità di una soluzione locale per il problema di Cauchy (dimostrazione omessa). Dimostrazione della unicità della soluzione locale del problema di Cauchy**. Capitolo 1, Sezione 2.1, Capitolo 8 Sezione 1.1 (fino a pagina 419)**

Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili. Esercizi di risoluzione di problemi di Cauchy. Condizioni di esistenza ed unicità della soluzione. Determinazione dell'esistenza della soluzione singolare. Equazioni differenziali del primo ordine lineari. Soluzione dell'equazione omogenea. Ricerca di una soluzione particolare della non omogenea. Condizioni di esistenza ed unicità della soluzione del problema di Cauchy. Esempi di risoluzione del problema di Cauchy. Intervallo massimale per la soluzione del problema di Cauchy **Capitolo 1, Sezioni 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4**

Teorema di esistenza e unicità globale per le equazioni del primo ordine. Lemma di Gronwall (con dimostrazione). Dipendenza continua della soluzione dai dati (dimostrazione). **Capitolo 8, Sezioni 1.1 e 3.1**. Equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore. Generalità. Spazi di funzioni)

Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Struttura dell'integrale generale nello spazio vettoriale. Dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni di una equazione differenziale omogenea del secondo ordine. Indipendenza lineare delle soluzioni e determinante wronskiano. Equazioni omogenee a coefficienti costanti. Equazioni non omogenee. Metodo della somiglianza per la soluzione dell'equazione non omogenea. **Capitolo 1, Sezioni 2.3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5**

Metodo delle variazioni delle costanti per le equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine. Metodo di somiglianza e della variazione delle costanti per le equazioni differenziali di ordine superiore (**Capitolo 1, Sezioni 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4**). Equazioni differenziali del primo ordine riconducibili alle equazioni a variabili separabili e lineari, equazione di Bernoulli ed equazione omogenee in y e t. **Capitolo 1 Sezioni Sezione Capitolo 8 Sezione 1.2** (escluse le equazioni differenziali esatte)

Equazioni autonome. Esistenza ed unicità delle soluzioni. Diagramma di fase. Punti stazionari e stabilità. Caduta del grave in un mezzo viscoso (**Capitolo 8 Sezione 2**)

Equazioni autonome. Definizione di stabilità. Stabilità asintotica. Criterio di stabilità (dimostrazione omessa). Esercizi di applicazione. Equazione logistica (l'equazione logistica è l'esempio 2.5 a pagina 8 e viene ripresa nel Capitolo 8 a pagina 431, esempio 1.9; la caduta del grave è l'esempio 2.7 pagina 9 del Capitolo 1 e viene ripresa nell'esempio 2.2 di pagina 437). **Capitolo 8 Sezione 1.3**

Risultati fondamentali sul problema di Cauchy per i sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine (dimostrazioni omesse). Teoremi 8.6, 8.7, 8.8 e 8.9. Esercizi di applicazione dei metodi risolutivi dei sistemi di due equazioni differenziali ordinarie. **Capitolo 8, Sezione 2**

Sistemi di equazioni differenziali autonomi in due variabili. Invarianza per traslazione temporale. Applicazione della unicità della soluzione del problema di Cauchy. Piano delle fasi. Punti stazionari e cicli. Stabilità dei punti stazionari. Equivalenza tra equazioni del secondo ordine e sistemi di equazioni autonome. Autovalori della matrice risolvente. Autovettori e costruzione della soluzione tramite autovalori ed autovettori. Equazione caratteristica per gli autovalori. Caso del discriminante diverso da zero (con autovalori sia negativi che di segno opposto) e del discriminante uguale a zero. **Capitolo 8, Sezione 4.2**

Sistemi autonomi in due incognite. Caso del discriminate minore di zero. Caso degli autovalori complessi ed immaginari. Caso della matrice diagonale con autovalori coincidenti. Classificazione dei punti stazionari. **Capitolo 8, Sezione 4.2**.

Campi vettoriali. Lavoro e circuitazione (integrali di linea di seconda specie). **Capitolo 6, Sezione 1.3**.

Campi conservativi. Funzione potenziale. Rotore. Campo irrotazionale. Insiemi semplicemente connessi. Il linguaggio delle forme differenziali. Calcolo del potenziale. Integrali curvilinei di forme differenziali. **Capitolo 6 Sezioni 1.3, 1.4, 1.5 e 1.7**. Successioni di funzioni. Convergenza puntiforme. Esempi

Parte Quarta

Serie di potenze. Convergenza totale. Continuità della somma, derivabilità della somma. Serie potenze. Raggio convergenza. **Capitolo 7, Sezione 7.1. Teoremi 7.1, 7.2 7.3 e 7.3.**

Serie di potenze. Proprietà fondamentali delle serie di potenze. Raggio di convergenza (criterio della radice e criterio del rapporto, Teoremi 7.4 e 7.5, con dimostrazione). Teorema 7.6, proprietà delle serie di potenze. Teorema di Abel (Teorema 7.7). Serie di Taylor e serie di potenze. **Capitolo 7, Sezioni 2.1 e 2.2**

Integrazioni alle equazioni differenziali. Equazioni riconducibili, tramite sostituzioni, ad equazioni lineari o a variabili separabili, di Bernoulli e omogenee in y ed in t. Equazione di Eulero (due forme di sostituzioni). Esercizi riepilogativi sulle equazioni differenziali. Intervallo massimale della soluzione

Equazioni differenziali autonome e diagramma di fase. Monotonia, concavità, limiti e stabilità. Classificazione dei punti stazionari.

Sistemi autonomi (casi degli autovalori reali). Equazioni differenziali (anche riconducibili a quelle lineari o di Bernoulli). Sistemi di equazioni lineari a coefficienti costanti. Studio della stabilità e determinazione della soluzione tramite l'uso degli autovalori e degli autovettori.

Teoremi la cui dimostrazione fa parte del programma di esame

Ortogonalità del gradiente con le curve di livello (pagina 137)

Formula di Taylor del secondo grado. Teorema 3.15 pagina 149

Teorema di Fermat. Teorema 3.17 pagina 156

Segno delle forme quadratiche in due variabili. Teorema 3.18 pagina 160

Studio della natura dei punti critici di una funzione in più variabili. Teorema 3.22 pagina 165 (caso di due varabili)

Moltiplicatori di Lagrange. Teorema 4.7 pagina 235

Lemma di Gronwall. Lemma 8.10 pagina 441

Dipendenza continua dai dati iniziali. Teorema 8.9 pagina 442

Struttura dell'integrale generale dell'equazione differenziale lineare del primo ordine. Teorema 1.5, pagina 22. Teorema 1.6 pagina 23

Condizione necessaria per un campo conservativo di classe C^1. Teorema 6.2 pagina 303

Raggio di convergenza di una serie di potenze. Teorema 7.4 pagina 304 e Teorema 7.5 pagina 305.