SULLA NOZIONE DI INTEGRALE DELLE FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI
NOTE DEL CORSO DI ANALISI II DEL PROF. A. AVANTAGGIATI
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA ELETTRONICA - A.A. 1999/2000

Partiamo dalla definizione di integrale di una funzione di una variabile $f \in C^0([a,b])$. Ricordiamo che

$$\int_{[a,b]} f(x)\ dx = \lim_{\delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i) \tag{1}$$

ove $[x_1, x_2], [x_2, x_3], ..., [x_n, x_{n+1}]$ è una decomposizione finita dell'intervallo $[a, b]$ in intervallini, mediante l'inserimento di $n-1$ punti $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$a = x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1} = b$$

e $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ è una scelta di punti con $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

La continuità (uniforme) della f garantisce che il limite della somma integrale che compare al secondo membro della (1) esiste finito. Tale limite è inteso nel senso delle funzioni multivoche, essendo

$$\delta = max\{x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., x_{n+1} - x_n\}$$

La definizione di **integrale** di una funzione di due o più variabili può essere formulata nello stesso modo, introducendo nel piano, nello spazio e, in generale, in $I\!R^\nu$ una classe di insiemi a cui si può attribuire una misura e che perciò si dicono **misurabili**.

La nozione di insieme misurabile può essere data seguendo diversi metodi. Quello più semplice si rifà al procedimento con cui Archimede attribuì una misura (area) al generico cerchio B, dimostrando la contiguità dei due insiemi numerici

$X(B)$ costituito dalle **aree** dei poligoni contenuti in B

e

$Y(B)$ costituito dalle **aree** dei poligoni contenenti B.

L'area o la misura del cerchio B è, per definizione, **l'elemento di separazione** tra $X(B)$ e $Y(B)$.

Lo sviluppo di questa idea richiede diverse precisazioni, soprattutto per determinare degli insiemi semplici in $I\!R^\nu$, che assumano il ruolo dei poligoni nel procedimento (detto di *esaustione*) di Archimede. Su ciò non ci soffermeremo. Accetteremo che in $I\!R^\nu$ esista una classe M_ν di **insiemi misurabili** (secondo Peano-Jordan) con le seguenti proprietà:

M_ν è chiusa rispetto alle operazioni elementari sugli insiemi, cioè :
se E_1 ed E_2 appartengono a M_ν, allora $E_1 \cap E_2$, $E_1 \cup E_2$ ed $E_1 \setminus E_2$ appartengono a M_ν.

Tutte le figure elementari del piano: triangoli, poligoni, cerchi ecc. appartengono a M_2 e la loro misura secondo Peano - Jordan coincide con la loro **area**.

Tutte le figure elementari dello spazio: prismi, cubi, cilindri, coni, poliedri ecc. appartengono a M_3 e la loro misura secondo Peano - Jordan coincide con il loro **volume**.

In generale, la **misura** $mis(\cdot)$ su M_ν ha le seguenti proprietà

$$mis(E_1 \cup E_2) \leq mis(E_1) + mis(E_2) \qquad \text{(subadditività)}$$

$$E_1 \subset E_2 \Longrightarrow mis(E_1) \leq mis(E_2) \qquad \text{(monotonia)}$$

e la importante **proprietà additiva**

Se E_1 ed E_2 non hanno punti **interni** in comune, allora

$$mis(E_1 \cup E_2) = mis(E_1) + mis(E_2).$$

Gli insiemi misurabili più semplici che frequentemente intervengono nelle applicazioni sono:

I

Il **rettangoloide** di una funzione continua e non negativa $f \in C^0([a, b])$, così definito:

$$C_f = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x \in [a, b] \; ; \; 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Per tale insieme è già noto che

$$\text{Area}\, C_f = mis(C_f) = \int_a^b \; f(x) \; dx \; .$$

(cfr. **[1]**, p. 232, Fig. 19)

II

Il dominio normale all'asse x determinato da due funzioni continue $f(x) \geq g(x)$ per $x \in [a, b]$

$$C_{f,g} = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid x \in [a, b] \; ; \; g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

Per tale insieme è già noto che

$$\text{Area}\, C_{f,g} = mis(C_{f,g}) = \int_a^b \; [f(x) - g(x)] \; dx \; .$$

(cfr. **[1]**, p. 232, Fig. 20)

III

Per l'analogo, normale all'asse y,

$$C'_{l,h} = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid y \in [c,d] \ ; \ h(y) \leq x \leq l(y)\}$$

si ha ovviamente

$$\text{Area}\, C'_{f,g} = mis(C'_{f,g}) = \int_c^d \ [l(y) - h(y)] \ dy \ .$$

(cfr. **[1]**, p. 232, Fig. 21)

È bene tener presente che, spesso, possono essere descritti con domini normali insiemi che apparentemente non lo sono. Si fermi l'attenzione sul seguente esempio:

$$\{(x,y) \in I\!R^2 \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 4\} = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid x \in [-2,2] \ ; \ 1 - \sqrt{4-x^2} \leq y \leq 1 + \sqrt{4-x^2} \ \}.$$

IV

(cfr. **[1]**, p. 234, Fig. 23)

Il corrispettivo del rettangoloide in $I\!R^{\nu+1}$ si ottiene fissando una funzione $f(\mathbf{P})$, definita, continua e non negativa in un dominio limitato T di $I\!R^\nu$ e ponendo ancora

$$C_f = \{(\mathbf{P}, z) \in \ I\!R^\nu \times I\!R \mid \mathbf{P} \in T \ ; \ 0 \leq z \leq f(\mathbf{P})\}.$$

Quando è $\nu > 1$, C_f si chiama **cilindroide di base T relativo a f**.

Nella teoria della misura secondo Peano-Jordan si dimostra:

Teorema (1): Se T è limitato e misurabile in $I\!R^\nu$ ed f è continua in T, C_f, come sottoinsieme di $I\!R^{\nu+1}$, è misurabile, cioè $C_f \in M_{\nu+1}$.

In modo analogo si definiscono i **domini normali in** $I\!R^{\nu+1}$.

V

(cfr. **[1]**, p. 237, Fig. 26)

Siano $f(x,y)$ e $g(x,y)$ funzioni definite nel dominio T del piano $0xy$; si introduce

$$C_{f,g} = \{(x,y,z) \in I\!R^3 \mid (x,y) \in T \ ; \ g(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$$

Si dimostra:
Teorema (2): Se T è limitato e misurabile in $I\!R^2$ (cioè $T \in M_2$) ed $f,g \in C^0(T)$, allora $C_{f,g} \in M_3$.

VI

(cfr. **[1]**, p. 232, Fig. 22)

Se $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sono costanti in T,

$$f(x,y) = d \quad ; \quad g(x,y) = c \qquad \forall (x,y) \in T$$

allora $C_{f,g} = T \times [c,d]$ è un **cilindro** di sezione T.

Definizione di Integrale in $I\!R^\nu$

Fissata una $f \in C^0(T)$, con T dominio limitato e misurabile di $I\!R^\nu$ ($T \in M_\nu$), si pone

$$\int_T f(\mathbf{P}) \; dT \quad := \quad \lim_{\delta \to 0} \ \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{P_i}) \cdot mis(T_i) \tag{2}$$

essendo $\{T_1, ..., T_n\}$ una generica decomposizione finita di T in domini $T_1, ..., T_n$, tutti misurabili e a due a due privi di punti **interni** in comune e quindi

$$T = \bigcup_{i=1}^{n} T_i \qquad \text{e} \qquad misT = \sum_{i=1}^{n} misT_i \quad ;$$

$P_1, ..., P_n$ è una scelta di punti tali che $P_i \in T_i$, per $i = 1, ..., n$ e

$$\delta = max \ \{diamT_1, diamT_2, ..., diamT_n\} \quad .$$

Il limite al secondo membro della (2) è inteso nel senso delle funzioni multivoche ed esiste finito, a causa della **uniforme continuità** della f in T.

Se f è costante ($f(\mathbf{P}) = c$), si ha facilmente

$$\int_T f(\mathbf{P}) \; dT \quad = \quad \int_T c \; dT \quad = \quad c \cdot mis(T) \quad .$$

Fissate f e $g \in C^0(T)$, si ha, per $f \geq 0$,

$$mis C_f \quad = \quad \int_T f(\mathbf{P})\, dT$$

e, per $g \leq f$,

$$mis C_{f,g} \quad = \quad \int_T [f(\mathbf{P}) - g(\mathbf{P})]\, dT \quad .$$

Bibliografia

[1] A. Avantaggiati - Analisi Matematica 2 - Ambrosiana Milano - 1995.