$$\iint_T x^2y^2\,dx\,dy = \iint_T \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}x^3y^2\right)dx\,dy = \frac{1}{3}\int_{+\partial T} x^3y^2dy =$$

$$= \frac{1}{3}a^3b^3\int_0^{2\pi}\cos^4 t\sin^2 t\,dt = \frac{4}{3}a^3b^3\int_0^{\pi/2}(\cos^4 t - \cos^6 t)dt =$$

$$= \frac{4}{3}a^3b^3\left(\frac{3\pi}{16} - \frac{5\pi}{32}\right) = \frac{\pi}{24}a^3b^3\,.$$

* * *

Nel caso particolare $f = 1$ oppure $g = 1$, le (6.6.2), (6.6.3) danno rispettivamente

$$\operatorname{area} T = \int_{+\partial T} x\,dy, \quad \operatorname{area} T = -\int_{+\partial T} y\,dx\,; \tag{6.6.4}$$

tali formule danno anche

$$\operatorname{area} T = \frac{1}{2}\int_{+\partial T} x\,dy - y\,dx\,. \tag{6.6.5}$$

Le relazioni ora stabilite permettono di esprimere l'area di un dominio regolare T per mezzo di un opportuno integrale curvilineo di forma differenziale lineare (non esatta) esteso alla frontiera ∂T.

Esempio 2 - Dato il dominio regolare T la cui frontiera ∂T è l'*asteroide* di equazioni parametriche $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in [0, 2\pi]$ [fig. 6.6.1] si ha

$$\operatorname{area} T = \frac{1}{2}\int_{+\partial T} x\,dy - y\,dx =$$

$$= \int_0^{2\pi}[a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t +$$

$$+ a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t]dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2\,.$$

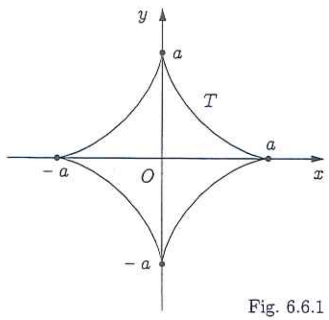

Fig. 6.6.1

* * *

Dalle formule di Green-Gauss (6.4.2), (6.4.3) si possono dedurre formule di integrazione per parti. Se $u(x,y)$, $v(x,y)$, $u_x(x,y)$, $v_x(x,y)$ sono funzioni continue in T, da (6.4.2) si ha

$$\iint_T \frac{\partial(uv)}{\partial x}dx\,dy = \int_{+\partial T} u\,v\,dy\,.$$

GHIZZETTI - ROSATI
ANALISI MATEMATICA II - MASSON
1996

Sviluppando il primo membro e portando un termine a secondo membro si ha

$$\iint_T u\frac{\partial v}{\partial x}dx\,dy = \int_{+\partial T} u\,v\,dy - \iint_T v\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy \tag{6.6.6}$$

che, utilizzando la (6.5.2), può essere posta nella forma

$$\iint_T u\frac{\partial v}{\partial x}dx\,dy = -\int_{+\partial T} u\,v\,\cos\widehat{xn}\,ds - \iint_T v\frac{\partial u}{\partial x}dx\,dy\,. \tag{6.6.6'}$$

In modo analogo se u, v, u_y, v_y sono continue in T si ha

$$\iint_T u\frac{\partial v}{\partial y}dx\,dy = -\int_{+\partial T} u\,v\,dx - \iint_T v\frac{\partial u}{\partial y}dx\,dy \tag{6.6.7}$$

che presenta la consueta dissimmetria nelle variabili x, y. Ciò che non si presenta nella analoga della (6.6.6′)

$$\iint_T u\frac{\partial v}{\partial y}dx\,dy = -\int_{+\partial T} u\,v\,\cos\widehat{yn}\,ds - \iint_T v\frac{\partial u}{\partial y}dx\,dy\,. \tag{6.6.7'}$$

6.7 Condizioni sufficienti per l'integrabilità di una forma differenziale lineare

Stabilito in $\mathbb{R}^2$ il teorema della divergenza, ad esempio nella forma (6.4.7) siamo ora in grado di dare condizioni sufficienti perché una forma differenziale lineare

$$X\,dx + Y\,dy \tag{6.7.1}$$

a coefficienti X, Y continui in un campo connesso A del piano xy sia un differenziale esatto o, come si dice, sia integrabile in A.

Sotto l'ulteriore ipotesi che X_y e Y_x siano continue in A, al § 6.3 si è stabilito che *condizione necessaria* per l'integrabilità è che risulti

$$X_y = Y_x\,, \qquad \forall (x,y) \in A\,, \tag{6.7.2}$$

cioè la forma differenziale lineare sia *chiusa*. Abbiamo poi stabilito che tale condizione è *sufficiente* se A è un intervallo, ovvero se X e Y sono funzioni omogenee di grado $\alpha \neq -1$ e di classe $C^1(A)$.

Vogliamo stabilire ulteriori condizioni sufficienti perché la (6.7.1) sia una forma esatta. Allo scopo premettiamo il teorema seguente:

Teorema 6.7.I – *Nelle ipotesi* (6.7.2), *cioè se la forma differenziale è chiusa in A, comunque si fissi un dominio regolare $T \subset A$ risulta*

$$\int_{+\partial T} X\,dx + Y\,dy = 0\,. \tag{6.7.3}$$

Dimostrazione - Basta applicare il teorema della divergenza nella forma (6.4.7) con $f = Y$, $g = -X$; si ricava

$$\iint_T \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_{+\partial T} X\, dx + Y\, dy = 0\,,$$

non appena si tenga conto che la funzione integranda a primo membro è nulla per la (6.7.2). □

Ciò premesso, sia γ una qualsiasi curva generalmente regolare *semplice e chiusa* contenuta in A (basterebbe prendere una poligonale semplice e chiusa); si può dimostrare, ma su questo non possiamo soffermarci, che γ è la frontiera di un dominio regolare T del piano xy (cosa evidente nel caso di poligonali). In alcuni casi T è contenuto in A, in altri no.

Riferendoci al primo caso, diremo che il campo connesso A è *un campo semplicemente connesso* se ogni curva semplice e chiusa γ tracciata in A è (da sola) la frontiera ∂T di un dominio regolare T contenuto in A [fig. 6.7.1].

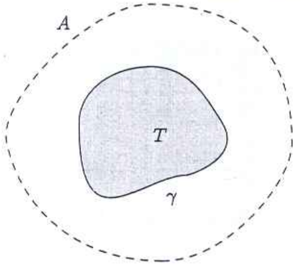

Fig. 6.7.1

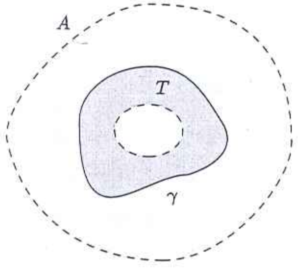

Fig. 6.7.2

Ad esempio un *intervallo aperto*, un campo circolare, l'intero piano xy, sono campi semplicemente connessi.

Invece, una corona circolare aperta, un intervallo aperto privato di un punto, sono campi connessi *non semplicemente*.

In generale si può affermare che un campo semplicemente connesso non presenta lacune (buchi), eventualmente ridotte a punti, o curve. In figura 6.7.2 è rappresentato un campo connesso *non semplicemente*.

Siamo ora in condizione di fornire il richiesto criterio sufficiente di integrabilità della forma differenziale (6.7.1).

Teorema 6.7.II – *Data la forma differenziale $X\,dx+Y\,dy$ con $X, Y, X_y, Y_x \in C^0(A)$, con A campo connesso di $\mathbb{R}^2$; se la forma è chiusa in A (vale cioè la (6.7.2)) e se il campo A è semplicemente connesso, allora la forma è un differenziale esatto e ogni sua primitiva $F(x,y)$ ha la forma*

$$F(x,y) = c + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(u,v)du + Y(u,v)dv \qquad (6.7.4)\cdot$$

con c costante arbitraria, ove l'integrale curvilineo è calcolato su una qualsiasi curva generalmente regolare congiungente il punto (fissato) $(x_0, y_0) \in A$ al punto variabile $(x,y) \in A$.

Dimostrazione - A è semplicemente connesso e quindi ogni curva γ semplice e chiusa (generalmente regolare) è frontiera di un dominio $T \subset A$; vale perciò la (6.7.3) con $\gamma = \partial T$ arbitraria. Per il teorema 6.2.III, osservazione II, la forma differenziale data è certamente esatta. La (6.7.4) è poi conseguenza della (6.2.12) con $Z = 0$, $z = 0$. □

Si noti che il caso di A intervallo di $\mathbb{R}^2$ (teorema 6.3.II) rientra come caso particolare in quello dei campi semplicemente connessi.

6.8 Forme differenziali lineari in campi più volte connessi

Se il campo A non è semplicemente connesso, la tesi del teorema 6.7.II in generale non è vera, come mostra l'esempio dato da (6.3.4).

In un campo A connesso (in generale non semplicemente) la (6.7.2) può intendersi come condizione *sufficiente* per l'*integrabilità locale* della forma differenziale lineare, nel senso che, ad ogni fissato punto $P_0 \equiv (x_0, y_0) \in A$, può associarsi un campo semplicemente connesso $A_0 \subset A$ e contenente P_0, nel quale la data forma differenziale risulti integrabile. In A_0 può allora definirsi una *primitiva locale* data da

$$F_0(x,y) = c + \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(u,v)du + Y(u,v)dv, \quad (x,y) \in A_0\,. \qquad (6.8.1)$$

In generale questa funzione $F_0(x,y)$, definita in A_0, non è prolungabile con continuità in A, in modo tale da far nascere in tutto A un integrale della forma.

Diamo ora delle condizioni atte a garantire tale prolungabilità per campi A di un ben determinato tipo.

Sia T un dominio regolare *ad unico contorno*, cioè la cui frontiera ∂T sia formata da un'unica curva generalmente regolare semplice e chiusa; siano $T_1, T_2, \ldots, T_k$ altri domini ad unico contorno tutti contenuti in $\overset{0}{T}$ e privi a due a due di punti comuni (fig. 6.8.1).

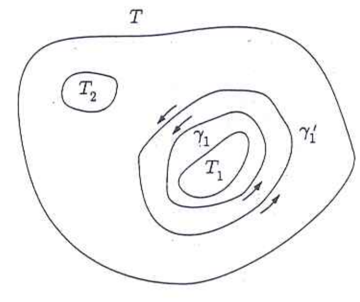

Fig. 6.8.1

Il campo A definito da $A = \overset{0}{T} - (T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_k)$ dicesi $(k+1)$-*volte connesso*, ovvero *dotato di k lacune* (i domini $T_1, T_2, \ldots, T_k$) o anche a $k+1$ *contorni* $(\partial T, \partial T_1, \partial T_2, \ldots \ldots, \partial T_k)$.

Sia γ_h $(h = 1, 2, \ldots, k)$ una curva generalmente regolare semplice e chiusa contenuta in A, che lasci da una parte T_h e dall'altra parte tutte le altre lacune. Una tale γ_h si dice una curva (o un ciclo) *contornante la lacuna* T_h. Se γ_h' è un altro qualsiasi ciclo contornante T_h, facciamo vedere che, *sotto l'ipotesi* (6.7.2) si ha

$$\int_{+\gamma_h} X\,dx + Y\,dy = \int_{+\gamma'_h} X\,dx + Y\,dy, \quad (h = 1, 2, \dots, k), \tag{6.8.2}$$

avendo scelto come verso positivo su ciascuno dei cicli γ_h, γ'_h quello che lascia a sinistra la lacuna T_h.

Per provare la (6.8.2) basta osservare che se γ_h e γ'_h non si intrecciano (come in fig. 6.8.1), esse costituiscono la frontiera di un dominio $D_h \subset A$; per il teorema 6.7.I si ha $\int_{+\partial D_h} X\,dx + Y\,dy = 0$ e questa, come è subito visto, equivale alla (6.8.2). Se poi γ_h, γ'_h si intrecciano, basta eseguire il confronto con un ciclo γ''_h che non intrecci né γ_h, né γ'_h.

A ciascuna delle lacune T_h si può dunque associare un ben determinato numero

$$\omega_h = \int_{+\gamma_h} X\,dx + Y\,dy, \quad (h = 1, 2, \dots, k), \tag{6.8.3}$$

(indipendente dalla scelta di γ_h) che dicesi *periodo* della forma data, *relativo a quella lacuna*; si hanno così k periodi $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$.

Vale allora il seguente teorema:

Teorema 6.8.I – *Se il campo A è $(k+1)$-volte connesso, condizione necessaria e sufficiente affinché la forma differenziale lineare $X\,dx + Y\,dy$ [con $X, Y, X_y, Y_x \in C^0(A)$ e $X_y = Y_x$] sia un differenziale esatto in A, è che essa abbia nulli tutti i suoi k periodi.*

Dimostrazione – La necessità è evidente; basta tener conto che ogni ciclo γ_h è una curva semplice e chiusa contenuta in A.

Per la sufficienza, consideriamo una *qualsiasi* curva generalmente regolare, semplice e chiusa $\gamma \subset A$. Se γ è la frontiera completa di un dominio tutto formato da punti di A, si ha $\int_{+\gamma} X\,dx + Y\,dy = 0$ (teorema 6.7.I). Nel caso contrario, la curva γ gira attorno a certe m lacune $T_{h1}, T_{h2}, \dots, T_{hm}$ (con $1 \le m \le k$); considerati allora m cicli $\gamma_{h1}, \gamma_{h2}, \dots, \gamma_{hm}$ non intersecanti γ e contornanti rispettivamente le m lacune indicate, le curve $\gamma, \gamma_{h1}, \gamma_{h2}, \dots, \gamma_{hm}$ costituiscono la frontiera di un dominio regolare $D \subset A$ e si ha $\int_{+\partial D} X\,dx + Y\,dy = 0$, ossia

$$\int_{+\gamma} X\,dx + Y\,dy + \sum_{j=1}^{m} \int_{-\gamma_{hj}} X\,dx + Y\,dy = 0\,.$$

Ma per la (6.8.3) e per l'ipotesi che tutti i periodi siano nulli, questa equivale alla

$$\int_{+\gamma} X\,dx + Y\,dy = \sum_{j=1}^{m} \omega_{hj} = 0$$

e quindi (teorema 6.2.III, osservazione II) la nostra forma è un differenziale esatto in A. □

Nelle ipotesi di validità di questo teorema 6.8.I, la (6.8.1) fornisce un integrale della forma in tutto A.

* * *

Possiamo ancora aggiungere che, *se qualche periodo non è nullo*, l'integrale $\int_{C(P',P'')} X\,dx + Y\,dy$ ha un valore che dipende dalla scelta della curva $C \subset A$ congiungente i due punti P', P''. Per esempio, se A è 2 *volte connesso* ed è $\omega_1 \neq 0$, si congiungano P' e P'' con due curve C, C_1 in modo che $C \cup C_1$ costituisca un ciclo contornante T_1 (fig. 6.8.2). Si ha allora

$$\int_{C(P',P'')} X\,dx + Y\,dy + \int_{C_1(P'',P')} X\,dx + Y\,dy = \omega_1\,,$$

onde gli integrali $\int_{C(P',P'')} \dots$, $\int_{C_1(P',P'')} \dots$ non sono uguali, perché la loro differenza vale $\omega_1 \neq 0$.

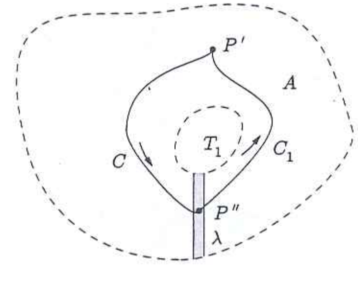

Fig. 6.8.2

Si può dire, in questo caso, che l'integrale $\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(u,v)du + Y(u,v)dv$ non definisce più una funzione ad un solo valore, ma una *funzione polidroma*.

Se con un qualsiasi "taglio" λ [fig. 6.8.2] si individua un campo semplicemente connesso A_0, la corrispondente primitiva presenta valori diversi sui "bordi del taglio". Il salto nella primitiva, nel caso di una sola lacuna T_1, non dipende dalla posizione del taglio, ma solo dal periodo $\omega_1 \neq 0$.

Osservazione I - Le precedenti considerazioni restano evidentemente valide anche quando *le lacune si riducano a punti o curve* oppure *il dominio T sia illimitato* nel qual caso potrebbe mancare il contorno ∂T (se $T \equiv \mathbb{R}^2$).

* * *

Operando in termini vettoriali come alla fine del § 6.3 [vedi in particolare (6.3.7), (6.3.8)], si hanno le seguenti conclusioni nel caso di $\mathbb{R}^2$.

Dato un *campo vettoriale* $\vec{f} = \vec{f}(x, y)$, di componenti $X(x, y)$, $Y(x, y)$ continui in un aperto connesso $A \subseteq \mathbb{R}^2$, se X_y e Y_x sono continue e il campo vettoriale è *irrotazionale* (onde $X_y = Y_x$) in A, cioè

$$\operatorname{rot} \vec{f} = 0, \qquad \forall (x, y) \in A\,, \tag{6.8.4}$$

esso è certamente *conservativo* nei due seguenti casi:

1) A è *semplicemente connesso*;

2) A è $(k+1)$-*volte connesso e sono nulli tutti i periodi*

$$\omega_h = \int_{+\gamma_h} \vec{f} \cdot \vec{\tau}\, ds\,, \qquad (h = 1, 2, \ldots, k)\,, \tag{6.8.5}$$

relativi alle k *lacune.*

In tali casi esiste una funzione (potenziale) $F(x, y)$, definita a meno di una costante arbitraria, tale che, $\forall (x, y) \in A$ risulti

$$\vec{f} = \operatorname{grad} F\,. \tag{6.8.6}$$

Si osservi che la (6.8.5), non è altro che (6.8.3), scritta in termini vettoriali [vedi (6.1.17)] avendo introdotto il versore $\vec{\tau}$ della retta tangente a γ_h orientata, unitamente all'ascissa curvilinea s nel verso $+\gamma_h$.

6.9 Integrale di una funzione complessa

Riprendendo le notazioni del § 1.4, sia $w = f(z)$, $z = x + iy$ una funzione della variabile complessa z, continua in un campo $A \subseteq \mathbb{R}^2$ cioè, essendo $z = (x, y)$, $\forall (x, y) \in A$. Diremo, più semplicemente, $f(z)$ continua in un campo connesso A del piano complesso $\mathbb{C}$.

Posto $dz = dx + i\, dy$, poniamo *per definizione*

$$f(z)dz = f(x, y)dx + i\, f(x, y)dy \tag{6.9.1}$$

cioè identifichiamo l'espressione $f(z)dz$ con la forma differenziale lineare, a coefficienti $f(x, y)$, $i\, f(x, y)$, continui in A. Ciò premesso, in analogia a quanto fatto per le forme differenziali lineari in $\mathbb{R}^2$, chiameremo *integrale curvilineo della funzione* $f(z)$, esteso ad una curva generalmente regolare $\gamma \subset A$, congiungente due arbitrari punti $z_0 = (x_0, y_0)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ di A, quello della corrispondente forma differenziale lineare e scriveremo perciò sinteticamente

$$\int_{\gamma(z_0, z_1)} f(z)dz = \int_{\gamma(z_0, z_1)} f(x, y)dx + i\, f(x, y)dy\,; \tag{6.9.2}$$

ovviamente, *in generale*, il valore di tale integrale curvilineo dipenderà dalla curva γ utilizzata per congiungere z_0 a z_1.

Si osserva subito che, in virtù di (1.3.7), e della (6.1.12) si ha

$$\left| \int_{\gamma(z_0, z_1)} f(z)dz \right| \le l \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z)|\,, \tag{6.9.3}$$

avendo indicato con l la lunghezza della curva γ, e rilevato che la funzione (reale) continua $|f(z)|$ è dotata di massimo su γ (insieme chiuso e limitato).

Se la forma differenziale $f\, dx + i\, f\, dy$ è *integrabile* in A, cioè è un differenziale esatto, l'integrale curvilineo (6.9.2) non dipende dalla curva γ utilizzata per

congiungere z_0 a z_1; si può allora introdurre una primitiva $F(z) = F(x, y)$ data da

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^{z} f(w)dw, \qquad \forall z \in A\,, \tag{6.9.4}$$

che più spesso si scrive

$$F(z) = c + \int f(z)dz \tag{6.9.4'}$$

con c costante arbitraria; ciò in analogia a quanto fatto per l'integrale indefinito di funzioni di una variabile [vedi ad esempio (1.3.8)].

Se $f(z)$ continua in A è ivi dotata di primitiva $F(z)$, diremo che essa è integrabile in A. Si ha al riguardo il seguente fondamentale risultato:

Teorema 6.9.I – *Se* $f(z)$ *continua nel campo connesso* A *è dotata di primitiva* $F(z)$, *questa risulta essere una funzione olomorfa in* A *e si ha*

$$F'(z) = f(z), \qquad \forall z \in A\,. \tag{6.9.5}$$

Dimostrazione - Se $F(z) = F(x, y)$ è una primitiva di $f(z)$, cioè della forma differenziale (6.9.1), $\forall z \in A$ risulta

$$F_x = f, \qquad F_y = i\, f\,,$$

cioè $F_y = i\, F_x = if \in C^0(A)$; ciò per il teorema 1.5.III è proprio la condizione di olomorfia per F e vale quindi la (6.9.5). □

Proveremo poi che $f(z)$, come derivata complessa di una funzione olomorfa è anch'essa olomorfa.

Viceversa, supponiamo che la $f(z)$ assegnata sia olomorfa, allora per il teorema 1.5.III *essa è di classe* $C^1(A)$ e risulta $f_x = \frac{1}{i} f_y$. Ma tale condizione, riferendosi alla forma (6.9.1) con $X = f$, $Y = i\, f$, è la condizione necessaria di integrabilità $X_y = Y_x$.

Allora seguendo le definizioni ed i teoremi del § 6.8 si conclude:

Teorema 6.9.II – *Se* $f(z)$ *è olomorfa nel campo connesso* A, *essa è in generale localmente integrabile in* A; *risulta integrabile in* A *se* A *è semplicemente connesso, ovvero se essendo* $(k+1)$-*volte connesso risultano nulli tutti i periodi*

$$\omega_h = \int_{\gamma_h} f(z)dz, \qquad (h = 1, \ldots, k)\,, \tag{6.9.6}$$

relativi alle lacune di A.

Nel caso di integrabilità locale, si può parlare solo di una primitiva locale, non di una primitiva in A nel senso delle funzioni $F(z)$ ad un solo valore e di classe $C^1(A)$.

Le funzioni

$$e^z,\ \sin z,\ \cos z,\ \sinh z,\ \cosh z,\ z^n \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$