SUCCESSIONI DI FUNZIONI

LUCIA GASTALDI

1. Definizioni ed esempi

Sia I un intervallo contenuto in $\mathbb{R}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si consideri una funzione $f_n : I \to \mathbb{R}$. Il simbolo $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ indica una successione di funzioni, cioè l'applicazione che ad ogni intero n associa una funzione reale di variabile reale definita in $I \subseteq \mathbb{R}$.

Per ogni $x_0 \in I$ si può considerare la successione numerica $\{f_n(x_0)\}$ dei valori che ciascuna funzione della successione assume nel punto x_0. Supponiamo che per ogni $x \in I$ la corrispondente successione numerica $\{f_n(x)\}$ sia convergente e che $f(x)$ sia il valore del suo limite. In questo modo si definisce una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ che sarà naturale chiamare il *limite* della successione di funzioni.

Definizione 1. Si dice che $\{f_n\}$ **converge puntualmente** in I verso la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se per ogni $x \in I$, risulta

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \tag{1}$$

cioè se $\forall x \in I$ e $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\nu_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}$ tale che

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_{\varepsilon,x}. \tag{2}$$

Esempio 1. $f_n(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 2. $f_n(x) = \frac{1}{n}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 3. $f_n(x) = \frac{x}{n}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 4. $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(x) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 5. $f_n(x) = x^n$ per ogni $-1 < x \le 1$, allora

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{per } x = 1. \end{cases}$$

Esempio 6.

$$f_n(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -1/n \\ nx & \text{se } |x| \le 1/n \\ 1 & \text{se } x > 1/n \end{cases}$$

allora il limite puntuale è

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ 1 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Esempio 7.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } |x| > 1/n \\ n^2 x & \text{se } |x| \le 1/n \end{cases}$$

allora si ha

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \ne 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

2. Proprietà del limite puntuale

Si verifica facilmente che il limite puntuale di una successione di funzioni eredita dagli elementi della successione stessa le seguenti proprietà.

Proposizione 1. *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ che converge puntualmente alla funzione $f : I \to \mathbb{R}$. Allora valgono le seguenti implicazioni:*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \ge 0\ \forall x \in I \Rightarrow f(x) \ge 0\ \forall x \in I;$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \textit{ è non decrescente in } I \Rightarrow f \textit{ è non decrescente in } I.$$

Invece altre proprietà come la limitatezza o la continuità non sono conservate durante il passaggio al limite puntuale, si vedano gli esempi 5, 6 e 7.

3. Convergenza uniforme

Introduciamo una nuova definizione di convergenza per successioni di funzioni:

Definizione 2. Date le funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ per $n \in \mathbb{N}$. Si dice che la successione di funzioni $\{f_n\}$ **converge uniformemente** in I verso la funzione $f : I \to \mathbb{R}$ se

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{3}$$

oppure se **per ogni** $\varepsilon > 0$ **esiste** $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ **tale che**

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \forall n > \nu_\varepsilon, \quad \forall x \in I.$$

Vale la seguente relazione tra i due tipi di convergenza per le successioni di funzioni:

Proposizione 2. *Se una successione di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ converge uniformemente in I allora converge anche puntualmente.*

Non vale il viceversa.

Si verifica facilmente che le successioni di funzioni degli esempi 1, 2 e 4 convergono uniformemente. Consideriamo ora la successione dell'esempio 3. Dobbiamo calcolare il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right|.$$

Siccome per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato la funzione $\frac{x}{n}$ è crescente, essa non è limitata, quindi l'estremo superiore $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\frac{x}{n}| = +\infty$ e la successione di funzioni non converge uniformemente.

Osserviamo anche che la successione di funzioni:

$$f_n : [-10, 10] \to \mathbb{R} \text{ definita da } f_n(x) = \frac{x}{n} \quad \text{per } x \in [-10, 10]$$

converge uniformemente alla funzione $f : [-10, 10] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = 0$ per $x \in [-10, 10]$, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{-10\le x\le 10} \left|\frac{x}{n} - 0\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{10}{n} = 0.$$

Studiamo la convergenza uniforme della successione definita nell'esempio 5. Dobbiamo calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{-1<x\le 1} |f_n(x) - f(x)|.$$

Per $x = 1$ si ha che $f_n(1) = f(1) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi l'estremo superiore non viene raggiunto in questo punto e possiamo restringerci a calcolare l'estremo superiore nell'intervallo aperto $]-1, 1[$. Si ha

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{-1<x\le 1} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{-1<x<1} |x^n| = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1.$$

La successione non converge uniformemente sull'intervallo $]-1, 1]$. Sia ora $a \in \mathbb{R}$ tale che $0 < a < 1$ e si consideri la successione di funzioni $f_n : [-a, a] \to \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = x^n$ per $|x| \le a$. Si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{-a<x<a} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{-a<x<a} |x^n| = \lim_{n\to+\infty} a^n = 0.$$

Quindi la successione di funzioni in considerazione converge uniformemente. Gli ultimi esempi mettono in evidenza il fatto che il tipo di convergenza per una successione di funzioni dipende anche dall'insieme di definizione della successione.

4. Convergenza uniforme, continuità e limitatezza

La convergenza uniforme permette di dedurre la continuità della funzione limite f dalla continuità dei singoli elementi della successione $\{f_n\}$.

Teorema 3 (della continuità del limite)**.** *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : I \to \mathbb{R}$. Supponiamo che la successione di funzioni $\{f_n\}$ converga uniformemente a una funzione $f : I \to \mathbb{R}$. Se ogni funzione f_n è continua in un punto $x_0 \in I$ allora anche la funzione limite f è continua in x_0.*

Una conseguenza immediata del teorema precedente sta nel fatto che se la funzione limite di una successione di funzioni continue non è continua, allora la successione di funzioni **non** converge uniformemente. Per esempio, consideriamo la successione dell'esempio 6. Tutte le funzioni della successione sono continue su $\mathbb{R}$, ma la funzione limite non è continua per $x = 0$, di conseguenza la successione di funzioni non converge uniformemente.

Diciamo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è *limitata* se esiste un numero reale $M > 0$ tale che $|f(x)| \le M$ per ogni $x \in I$.

Vale il seguente teorema:

Teorema 4 (della limitatezza del limite)**.** *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : I \to \mathbb{R}$. Supponiamo che la successione di funzioni $\{f_n\}$ converga uniformemente a una funzione $f : I \to \mathbb{R}$. Se ogni funzione f_n è limitata in I allora anche la funzione limite f è limitata in I.*

5. Relazioni tra convergenza puntuale e uniforme con l'integrazione e la derivazione

In questo paragrafo ci occupiamo di vedere se si possono scambiare l'ordine tra le operazioni di integrazione oppure di derivazione con il passaggio al limite. Cominciamo con qualche esempio.

Esempio 8. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ data da $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$ per $0 \le x \le 1$. Per ogni $x \in [0,1]$ si ha
$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} nx(1-x^2)^n = 0$$
quindi la funzione limite $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ è identicamente nulla sull'intervallo $[0,1]$.

Calcoliamo l'integrale delle f_n
$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x(1-x^2)^n\,dx = -\frac{n}{2}\left[\frac{1-x^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{2(n+1)}.$$
Quindi si ha
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}.$$
Mentre la funzione limite ha integrale uguale a zero. Quindi in questo caso abbiamo ottenuto che
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx \ne \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$
Per completare l'analisi, studiamo la convergenza uniforme della successione. Come al solito si deve calcolare
$$\lim_{n\to+\infty}\sup_{0\le x\le 1}|f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to+\infty}\sup_{0\le x\le 1}|nx(1-x^2)^n|.$$
Le funzioni f_n sono tutte non negative e infinitamente derivabili, inoltre $f_n(0) = f_n(1) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Calcolo il massimo sull'intervallo $[0,1]$ imponendo l'annullamento della derivata prima
$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n[(1-x^2)^n - 2nx^2(1-x^2)^{n-1})] = n(1-x^2)^{n-1}(1-x^2-2nx^2) \\ &= n(1-x^2)^{n-1}(1-(1+2n)x^2). \end{aligned}$$
Quindi $f_n'(x) = 0$ per $x = 1/\sqrt{1+2n}$. Calcoliamo il valore massimo:
$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right) = \frac{n}{\sqrt{1+2n}}\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^n$$
Da cui si ottiene
$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty}\sup_{0\le x\le 1}|nx(1-x^2)^n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2n}}\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^n \\ &\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2n}}\left(\left(1-\frac{1}{1+2n}\right)^{1+2n}\right)^{\frac{n}{1+2n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{1+2n}}e^{-\frac{1}{2}} = +\infty. \end{aligned}$$
La successione non converge uniformemente.

Esempio 9. Per $n \in \mathbb{N}$ si consideri la funzione continua

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } 1/n \leq |x| \leq 1 \\ n^2 x & \text{se } 0 \leq |x| < 1/n. \end{cases}$$

Il limite puntuale della successione di funzioni è:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } 0 < |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Si nota che la successione di funzioni non converge uniformemente, in quanto il suo limite è una funzione discontinua per $x = 0$.

Inoltre osserviamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha:

$$\int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx = 0$$

mentre la funzione limite f non è integrabile sull'intervallo $[-1, 1]$.

Esempio 10. Per $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il limite puntuale di questa successione è la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Studiamo la convergenza uniforme. Dobbiamo quindi calcolare

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \lim_{n \to +\infty} \sup_{x \geq 0} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x \right|,$$

tenendo conto del fatto che le funzioni f_n e f sono entrambe pari. Per $x = 0$ si ha che $f_n(0) - f(0) = \sqrt{\frac{1}{n}}$. Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + x} = 0.$$

La derivata prima è sempre negativa per $x > 0$, infatti

$$f_n'(x) - f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - 1 < 0 \quad \text{per } x > 0.$$

Il massimo della differenza si trova quindi in $x = 0$, da cui segue che

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \lim_{n \to +\infty} |f_n(0) - f(0)| = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0.$$

La successione di funzioni converge uniformemente. Vediamo come si comporta la successione rispetto alla derivazione. Calcolando le derivate prime di ciascun elemento della successione si ottiene una nuova successione data da

$$f_n'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

La funzione limite $f(x) = |x|$ però non è derivabile per $x = 0$.

Esempio 11. Consideriamo la successione dell'esempio 4 che riportiamo qui. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ogni elemento della successione è una funzione infinitamente derivabile e la derivata prima è

$$f_n'(x) = \cos nx \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo già osservato che la successione in esame converge uniformemente alla funzione identicamente nulla. Risulta che per $x = 0$, $\lim_{n\to+\infty} f_n'(0) = 1$, mentre $f'(0) = 0$. Quindi abbiamo verificato che in questo caso

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x_0) \neq f'(x_0).$$

Gli esempi riportati fanno capire che non sempre è possibile passare al limite sotto il segno di integrale o di derivata. Il teorema seguente mostra che la convergenza uniforme consente lo scambio del simbolo di integrazione con quello di limite.

Teorema 5 (di passaggio al limite sotto segno di integrale)**.** *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che la successione di funzioni $\{f_n\}$ converga uniformemente a una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se ogni funzione f_n è integrabile su $[a, b]$ allora anche la funzione limite f è integrabile su $[a, b]$ e vale*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx. \tag{4}$$

Per il passaggio al limite sotto degno di derivata, la convergenza uniforme non basta, bisogna introdurre delle ipotesi aggiuntive.

Teorema 6 (di passaggio al limite sotto segno di derivata)**.** *Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni derivabili con derivata continua in $[a, b]$. Supponiamo che sia la successione $\{f_n\}$ che quella delle sue derivate $\{f_n'\}$ siano uniformemente convergenti in $[a, b]$. Allora la successione $\{f_n\}$ converge a una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile con derivata continua in $[a, b]$ e risulta*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n'(x_0) = f'(x_0).$$

6. Esercizi

Per ciascuna delle successioni di funzioni $f_n : I \to \mathbb{R}$ definite negli esercizi da 1 a 25, svolgere i punti seguenti:

a. calcolare l'insieme E di convergenza puntuale ed il limite puntuale $f : E \to \mathbb{R}$;
b. verificare se la convergenza è uniforme su tutto l'insieme E;
c. nel caso in cui la convergenza non sia uniforme, trovare opportuni sottoinsiemi di E in modo tale che la convergenza risulti uniforme.

1. $f_n(x) = e^{-nx^2}$ per $x \in \mathbb{R}$.
2. Sia c_n una successione numerica, per $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) = \begin{cases} c_n & \text{se } 0 < x < 1/n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3.
$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{|x|^{\sqrt{n}} + n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

4.
$$f_n(x) = \frac{n}{2n+1} e^{-n\sqrt{x+2}} \qquad \text{per } x \geq 0.$$

5.
$$f_n(x) = e^{-\sqrt{|nx|}} \arctan\left(1 + \frac{nx}{\log(e+|x|)}\right) \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

6.
$$f_n(x) = \frac{\log\left(1 + e^{n^2(1-x)}\right)}{n^2} \quad \text{per } 0 \leq x \leq 1.$$

7.
$$f_n(x) = \frac{x}{x^4 + \frac{1}{n}} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}.$$

8.
$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

9.
$$f_n(x) = \frac{x}{|x| + \frac{1}{n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

10.
$$f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

11. Sia $\{a_n\}$ una successione numerica qualunque e b un numero reale,
$$f_n(x) = \begin{cases} a_n & \text{se } n-1 < x \leq n \\ b & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

12.
$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n < x \leq 2n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

13.
$$f_n(x) = (x^2 - x)^n \quad \text{per } 0 \leq x \leq 1.$$

14. Siano a e b due numeri reali tali che $a > 0$ e $b > 1$,
$$f_n(x) = \begin{cases} an^2 x & \text{per } 0 \leq x < \frac{1}{n} \\ \frac{a}{1-b} n^2 x + \frac{ab}{b-1} n & \text{per } \frac{1}{n} \leq x < \frac{b}{n} \\ 0 & \text{per } \frac{b}{n} \leq x \leq b. \end{cases}$$

15.
$$f_n(x) = \frac{n \sin(x^2+1) + n^2 x}{n^2(x^2+1)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

16.
$$f_n(x) = \frac{nx^3 + (n+1)^2 \sin x}{n^2+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

17.
$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} \quad \forall x \geq 0.$$

18.
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} \quad \forall x \geq 0.$$

19.
$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

20.
$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

21.
$$f_n(x) = n^6 \sin x \, e^{-nx} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

22.
$$f_n(x) = n\left(\chi_{(0,1/n)}(x) - \chi_{(1-1/n,1)}(x)\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

23.
$$f_n(x) = \left(\arctan\left(\frac{x}{n}\right)\right)^n \chi_{(-n,n)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

24. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua,
$$f_n(x) = \varphi(x)\chi_{(-n,n)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

25. Per quali valori di α la successione $f_n(x) = n^{1+\alpha}xe^{\pi-|x|}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ converge puntualmente su $\mathbb{R}$? Studiare la convergenza uniforme come suggerito nelle domande b. e c.

Nota bene: Sia I un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, allora la funzione $\chi_I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta *funzione indicatrice dell'insieme* I e vale
$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{se } x \notin I \end{cases}$$

Dipartimento di Matematica, Università di Brescia, Italy
E-mail address: `gastaldi@ing.unibs.it`
URL: `http://bsing.ing.unibs.it/~gastaldi/`