A. AVANTAGGIATI - ANALISI MATEMATICA 2
- AMBROSIANA ED. - 1995

$\boxed{136}$

Serie di potenze nel campo reale

Consideriamo una serie di potenze

1 $a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_k(x-x_0)^k+\ldots$ ossia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$

supponendo reali: x_0, tutti i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_k, \ldots$ e la variabile x.

Poniamoci il problema di determinare l'insieme di convergenza Φ_R ($\subset \mathbb{R}$) e la funzione somma $f(x)$ della **1**. I risultati che abbiamo stabilito per le serie di potenze nel campo complesso ci consentono di dare alcune risposte rapide e precise a tale problema.

Introduciamo prima di tutto la serie della variabile complessa $z = x+iy$ associata alla **1**

2 $$a_0 + a_1(z-x_0) + a_2(z-x_0)^2 + \ldots + a_k(z-x_0)^k + \ldots$$

ed osserviamo che questa si riduce alla **1** quando a z si sostituisca la variabile reale x, ossia ponendo nella **2** $y = 0$.

Facilmente si dimostra il

TEOREMA 1 *Se r è il raggio di convergenza della **2** ed è $0 < r < +\infty$, l'insieme di convergenza Φ_R della **1** verifica la doppia inclusione*

3 $$]x_0 - r, x_0 + r[\subset \Phi_R \subset [x_0 - r, x_0 + r]\,.$$

*Se $r = 0$ la **1** converge solo in x_0, se $r = +\infty$ la **1** converge assolutamente in tutto $\mathbb{R}$ e $\Phi_R = \mathbb{R}$.*

DIM. *Fissiamo $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$; risulta $|x - x_0| < r$, perciò la **1** converge assolutamente in tale x, come conseguenza del fatto che converge assolutamente la **2**, per ogni $z \in \mathbb{C}$ tale che $|z - x_0| < r$. Se si fissa x non appartenente a $[x_0 - r, x_0 + r]$, si avrà $|x - x_0| > r$ e la **1** non converge in x, perché non vi converge la **2**, che ad essa si riduce per $z = x \in \mathbb{R}$. In modo analogo si dimostrano le altre asserzioni* □

Il raggio di convergenza della **2** si chiama **Raggio di Convergenza** della serie delle potenze nel campo reale **1**, e $]x_0 - r, x_0 + r[$ si dice l'**Intervallo di Convergenza**.

Questo si presenta come l'intersezione tra $B(x_0, r)$, cerchio di convergenza della **2**, e l'asse reale.

I teoremi 5 e 6 di $\boxed{135}$ consentono perciò di determinare il raggio di convergenza delle serie di potenze nel campo reale. Osserviamo d'altra parte che tutte le serie di potenze già studiate erano a coefficienti reali.

È evidente inoltre che introdotta la somma $S(z)$ della **2** e che viene definita in $B(x_0, r)$ la somma $f(x)$ della **1** non è altro che la restrizione di $S(z)$ a Φ_R, e si ha semplicemente: $f(x) = S(x)$, $\forall\, x \in]x_0 - r, x_0 + r[$.

OSSERVAZIONE 1 *A priori non si può decidere se qualcuno dei punti $x_0 - r$ o $x_0 + r$ appartiene o no a Φ_R.*

A proposito di questa osservazione vogliamo segnalare il seguente

TEOREMA 2 (di **Abel**) *Se la serie di potenze **1** con intervallo di convergenza $]x_0 - r, x_0 + r[$ risulta convergente in $x_0 + r$ allora essa è uniformemente convergente in $[x_0, x_0 + r]$.*

DIM. (*Cfr.* $\boxed{31}$ *di* [3]).

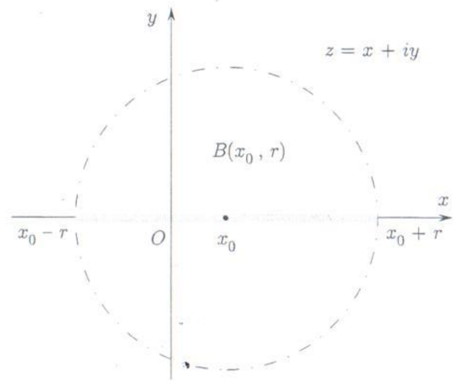

Fig. 6. In evidenza l'Intervallo di convergenza della 1 come intersezione tra $B(x_0, r)$ e l'asse reale.

TEOREMA 3 *Se $r \in \mathbb{R}_+$ è il raggio di convergenza della **1**, per ogni $r_1 \in]0, r[$ la **1** converge totalmente nell'intervallo $[x_0 - r_1, x_0 + r_1]$.* 1e

DIM. *La **2** converge totalmente in $\overline{B}(x_0, r_1)$ per il Teorema 4 di* $\boxed{135}$ *; la tesi ne è ovvia conseguenza, perché $[x_0 - r_1, x_0 + r_1] \times \{0\}$ è contenuto in $\overline{B}(x_0, r_1)$* □

Questo risultato consente di affermare

PROPOSIZIONE 1 *Ogni serie di potenze può essere integrata termine a termine su ogni intervallo chiuso strettamente contenuto nel suo intervallo di convergenza.*

Fissati cioè $a, b \in]x_0 - r, x_0 + r[$ possiamo scrivere la seguente formula

4 $$\int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \right\} dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b (x - x_0)^k dx\,.$$

In particolare ricaviamo che la serie che compare al secondo membro è convergente.

Applichiamo la **4** prendendo $x_0 = a$ e $b = x$; chiamando $f(x)$ la somma della **1** e t la variabile di integrazione abbiamo

5 $$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{1}{k+1} (x - x_0)^{k+1}\,.$$

Esplicitando l'ultima serie scritta possiamo affermare

6 $$a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{a_k}{k+1}(x - x_0)^{k+1} + \ldots$$

è convergente per ogni $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ cioè