Prova scritta di Geometria Differenziale 7.2.2017, Soluzioni
Ingegneria Meccanica, a.a. 2016-2017

Cognome .... Nome ....

L'esame consiste di quattro esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Non saranno accettati fogli di brutta copia.

Esercizio 1 Si consideri la curva piana parametrizzata $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$ dove $t \in [-\pi, \pi]$.

a) Dopo aver trovato i valori di t per i quali α è regolare si determini l'intervallo I piu' grande contenente 0 nel quale α risulta regolare.

Soluzione. Poiché $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}$ *risulta che* α *è regolare per* $t \neq \frac{\pi}{2}$ *e* $t \neq -\frac{\pi}{2}$ *e che* $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

b) Detto I l'intervallo di cui alla parte a), si calcoli la curvatura $k(t)$ di α se $t \in I$. Si determinino gli eventuali valori di t per i quali $k(t)$ si annulla, e quei valori nei quali il valore assoluto di $k(t)$ è massimo.

Soluzione. Risulta

$$k(t) = -\frac{4\cos^3 t}{(\cos^2 t + 4\sin^2(2t))^{\frac{3}{2}}} = -\frac{4}{(1 + 16\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

che non è mai nulla. Dunque

$$|k(t)| = \frac{4}{(1 + 16\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

che risulta avere valore massimo 4 *quando* $t = 0$.

c) Eliminare il parametro per ottenere l'equazione cartesiana della traccia di α (usare opportune identità trigonometriche). Disegnare quindi la traccia di α, e stabilire se α è iniettiva nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Soluzione. Poiché $y = \cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t$ *si ha, eliminando* t, *l'equazione cartesiana*

$$y = 1 - 2x^2$$

che rappresenta una parabola di vertice $(0, 1)$ *con concavita' rivolta verso il basso, che taglia l'asse* x *nei punti* $P_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0), P_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. *La parametrizzazione* α *non è iniettiva nell'intervallo*

$[-\pi, \pi]$, poiche' $\alpha(0) = \alpha(\pi) = \alpha(-\pi) = 0$. In effetti la traccia di α è l'arco di parabola $y = 1 - 2x^2$ che giace al di sopra della retta $y = -1$: tale arco e' percorso due volte, invertendo il senso di marcia nei punti $(-1, -1), (1, -1)$. Si verifica che la parametrizzazione α è iniettiva sull'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio 2 Si consideri la superficie parametrizzata

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ u \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

a) Calcolare la prima forma fondamentale g e il versore normale $N_\Sigma(u, v)$ della parametrizzazione. Stabilire se esistono valori di u, v per i quali N_Σ risulta parallelo al vettore $w = (1, 1, 1)^t$.

Soluzione. Risulta

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{pmatrix} -v \sin u \\ -v \cos u \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ v \end{pmatrix}$$

da cui otteniamo

$$N_\Sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ -v \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 1 + v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il versore normale sara' parallelo al vettore $v = (1, 1, 1)^t$ se e solo se $N_\Sigma \wedge v = 0$. Svolgendo i calcoli si avranno le soluzioni:

$$\begin{cases} u = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ v = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \quad \begin{cases} u = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi \\ v = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

b) Calcolare la curvatura gaussiana e la curvatura media di Σ.

Soluzione. Si verifica che la seconda forma fondamentale è

$$l = \frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\det l = -\dfrac{1}{1 + v^2}$ *e risulta*

$$K = \frac{\det l}{\det g} = -\frac{1}{(1 + v^2)^2}.$$

La matrice dell'operatore di Weingarten è

$$w = \frac{1}{(1+v^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con autovalori (curvature principali)

$$k_1 = \frac{1}{1+v^2}, \quad k_2 = -\frac{1}{1+v^2}$$

dunque $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$ *in tutti i punti e* Σ *è dunque una superficie* minimale, *detta* elicoide.

c) Stabilire quali delle linee coordinate $v = v_0 =$ costante risultano essere geodetiche di Σ.

Soluzione. La linea coordinata $v = v_0$ *si parametrizza* $\alpha(t) = f(t, v_0)$ *ovvero*

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos t \\ v_0 \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Si vede immediatamente che α *è un'elica per* $v_0 \neq 0$ *e si riduce all'asse* z *quando* $v_0 = 0$. *Per stabilire se* α *è una geodetica di* Σ *basta calcolare la curvatura geodetica* k_g *di* α *in* Σ*:*

$$k_g(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), N_\Sigma(\alpha(t)))}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Poiché

$$N_\Sigma(\alpha(t)) = \frac{1}{\sqrt{1+v_0^2}} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -v_0 \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$k_g(t) = -\frac{v_0}{1+v_0^2}.$$

Osserviamo che $k_g(t)$ *non dipende da* t*, ma solo da* v_0*, e si annulla se e solo se* $v_0 = 0$. *Dunque l'unica linea coordinata che è anche una geodetica si ottiene per* $v_0 = 0$ *(asse* z*).*

Esercizio 3 Sia $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare dello spazio parametrizzata dall'ascissa curvilinea s.

a) Definire il versore tangente $T(s)$, il versore normale $N(s)$ e il versore binormale $B(s)$ e scrivere le formule di Frenet (non occorre dimostrarle).

Soluzione. Vedere gli appunti.

b) Si consideri ora la superficie Σ formata dal tubo di raggio $R > 0$ intorno a γ. Σ è parametrizzata come segue:

$$f(s,t) = \gamma(s) + R\cos t \cdot N(s) + R\sin t \cdot B(s),$$

Calcolare la prima forma fondamentale di Σ, e dare una condizione sufficiente affinche' il punto $f(s,t)$ sia regolare.

Soluzione. Vedere gli appunti. In ogni modo, se $k(s)$ è la curvatura di γ in s, allora risulta che f è regolare in (s,t) se e solo se

$$1 - Rk(s)\cos t \neq 0.$$

Nei punti regolari, la prima forma fondamentale risulta

$$g = \begin{pmatrix} \theta(s,t)^2 + R^2\tau(s)^2 & -R^2\tau(s) \\ -R^2\tau(s) & R^2 \end{pmatrix},$$

dove si è posto $\theta(s,t) = 1 - Rk(s)\cos t$, e dove $\tau(s)$ indica la torsione di γ in s.

c) Calcolare il versore normale N_Σ di Σ nel generico punto (s,t); stabilire inoltre se le curve $s = s_0 =$ costante sono geodetiche di Σ oppure no.

Soluzione. Un calcolo mostra che

$$N_\Sigma(s,t) = -\cos t \cdot N(s) - \sin t \cdot B(s).$$

La curva $s = s_0$ si parametrizza $\alpha(t) = f(s_0,t)$ dunque

$$\alpha(t) = \gamma(s_0) + R\cos t \cdot N(s_0) + R\sin t \cdot B(s_0).$$

Derivando due volte rispetto a t otteniamo

$$\alpha''(t) = -R\cos t \cdot N(s_0) - R\sin t \cdot B(s_0).$$

Confrontando con la precedente espressione del versore normale di Σ vediamo che il vettore accelerazione di α si scrive

$$\alpha''(t) = -RN_\Sigma(s_0,t) = -RN_\Sigma(\alpha(t).$$

Siccome il vettore accelerazione è sempre parallelo al versore normale della superficie, la curva ha accelerazione tangenziale ovunque nulla, dunque è una geodetica. Alla stessa conclusione si poteva giungere osservando che la curvatura geodetica è sempre nulla.

Esercizio 4 Si consideri l'equazione (superficie di livello) $\Sigma : x^2 + y^2 + xy - z = 0$.

a) Parametrizzare Σ e calcolarne la curvatura gaussiana nel punto generico. Determinare la natura dei punti di Σ (ellittici, parabolici, o iperbolici).

Soluzione. Notando che $z = x^2 + y^2 + xy$ *possiamo parametrizzare* Σ *come grafico della funzione* $F(x, y) = x^2 + y^2 + xy$. *Dunque una parametrizzazione è*

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ F(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 + uv \end{pmatrix} \qquad (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

Il calcolo della curvatura gaussiana si puo' dunque effettuare a partire dalla parametrizzazione trovata. Comunque, se $\nabla^2 F$ *è la matrice hessiana, abbiamo che*

$$K(u, v) = \frac{\det \nabla^2 F(u, v)}{1 + |\nabla F|^2(u, v)}.$$

Poiche'

$$\nabla^2 F(u, v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |\nabla F|^2(u, v) = 5u^2 + 5v^2 + 8uv,$$

otteniamo

$$K(u, v) = \frac{3}{1 + 5u^2 + 5v^2 + 8uv}$$

che è sempre positiva, dunque i punti sono tutti ellittici.

b) Determinare le curvature principali e le direzioni principali nel punto $(0, 0, 0) \in \Sigma$.

Soluzione. Notiamo che l'origine è un punto critico di F. *Si verifica immediatamente che il piano tangente nell'origine è il piano* $z = 0$ *e che la base* $(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$ *è data da*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo mostra che, nell'origine, g *è la matrice identità, e dunque la matrice dell'operatore di Weingarten coincide con la matrice hessiana (nell'origine), cioè :*

$$w = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Occorre dunque calcolare autovettori e autovalori di w. *Gli autovalori sono* $\lambda = 1, \mu = 3$ *e una base ortonormale di autovettori (direzioni principali) è data da*

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

associati rispettivamente a λ e μ.

c) Sia $p = (0,0,0)$. Determinare l'equazione di $T_p\Sigma$, il piano tangente a Σ in p. Dopo aver osservato che $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $T_p\Sigma$, calcolare $k_X(p)$ (la curvatura normale di Σ in p, nella direzione X). Determinare inoltre il valore massimo e il valore minimo di $k_X(p)$, al variare di X in $T_p\Sigma$ tale che $|X| = 1$.

Soluzione. Abbiamo già visto che l'equazione del piano tangente nell'origine è $z = 0$. Sappiamo che la curvatura normale di Σ in p, nella direzione X, è data da

$$k_X(p) = II(X, X) = \langle W(X), X \rangle.$$

Per il dato vettore tangente X, abbiamo

$$X = \frac{1}{2}E_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}E_2,$$

dunque sapendo che

$$\begin{cases} W(E_1) = 2E_1 + E_2 \\ W(E_2) = E_1 + 2E_2 \end{cases}$$

otteniamo

$$W(X) = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2})E_1 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3})E_2$$

e di conseguenza

$$k_X(p) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Infine, il valore massimo (risp. minimo) della curvatura normale in un dato punto coincide con la curvatura principale massima (risp. minima) nel punto. Tali valori sono, per quanto calcolato in precedenza, $\mu = 3$ e, rispettivamente, $\lambda = 1$.