Prova scritta di Geometria Differenziale 7.02.2017
Ingegneria Meccanica, a.a. 2016-2017

Cognome .... Nome ....

L'esame consiste di quattro esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Non saranno accettati fogli di brutta copia.

Esercizio 1 Si consideri la curva piana parametrizzata $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$ dove $t \in [-\pi, \pi]$.

a) Dopo aver trovato i valori di t per i quali α è regolare si determini l'intervallo I piu' grande contenente 0 nel quale α risulta regolare.

b) Detto I l'intervallo di cui alla parte a), si calcoli la curvatura $k(t)$ di α se $t \in I$. Si determinino gli eventuali valori di t per i quali $k(t)$ si annulla, e quei valori nei quali il valore assoluto di $k(t)$ è massimo.

c) Eliminare il parametro per ottenere l'equazione cartesiana della traccia di α (usare opportune identità trigonometriche). Disegnare quindi la traccia di α, e stabilire se α è iniettiva nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Esercizio 2 Si consideri la superficie parametrizzata

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} v \cos u \\ v \sin u \\ u \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}.$$

a) Calcolare la prima forma fondamentale g e il versore normale $N_\Sigma(u, v)$ della parametrizzazione. Stabilire se esistono valori di u, v per i quali N_Σ risulta parallelo al vettore $w = (1, 1, 1)^t$.

b) Calcolare la curvatura gaussiana e la curvatura media di Σ.

c) Stabilire quali delle linee coordinate $v = v_0 =$ costante risultano essere geodetiche di Σ.

Esercizio 3 Sia $\gamma : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare dello spazio parametrizzata dall'ascissa curvilinea s.

a) Definire il versore tangente $T(s)$, il versore normale $N(s)$ e il versore binormale $B(s)$ e scrivere le formule di Frenet (non occorre dimostrarle).

b) Si consideri ora la superficie Σ formata dal tubo di raggio $R > 0$ intorno a γ. Σ è parametrizzata come segue:

$$f(t, s) = \gamma(s) + R \cos t \cdot N(s) + R \sin t \cdot B(s),$$

Calcolare la prima forma fondamentale di Σ, e dare una condizione sufficiente affinche' il punto $f(s,t)$ sia regolare.

c) Calcolare il versore normale N_Σ di Σ nel generico punto (s,t); stabilire inoltre se le curve $s = s_0 =$ costante sono geodetiche di Σ oppure no.

Esercizio 4 Si consideri l'equazione (superficie di livello) $\Sigma : x^2 + y^2 + xy - z = 0$.

a) Parametrizzare Σ e calcolarne la curvatura gaussiana nel punto generico. Determinare la natura dei punti di Σ (ellittici, parabolici, o iperbolici).

b) Determinare le curvature principali e le direzioni principali nel punto $(0,0,0) \in \Sigma$.

c) Sia $p = (0,0,0)$. Determinare l'equazione di $T_p\Sigma$, il piano tangente a Σ in p. Dopo aver osservato che $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $T_p\Sigma$, calcolare $k_X(p)$ (la curvatura normale di Σ in p, nella direzione X). Determinare inoltre il valore massimo e il valore minimo di $k_X(p)$, al variare di X in $T_p\Sigma$ tale che $|X| = 1$.