Prova scritta di Geometria 20/02/2019 A
Ing. Meccanica a.a. 2018/19

Cognome .... Nome .... Matricola ....

L'esame consiste di sei esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Non saranno accettati fogli di brutta copia.

Esercizio 1 a) Calcolare l'area del triangolo dello spazio di vertici $A = (1, 1, 1), B = (2, 3, 4), C = (0, 1, 3)$.

b) Determinare la matrice canonica della proiezione ortogonale sulla retta $r : x - 3y = 0$, e il simmetrico del punto $Q = (1, 1)$ rispetto a r.

c) Discutere la compatibilità del sistema lineare $\begin{cases} x - y - kz = 0 \\ x + z = k^2 - k + 1 \\ y - kz = 1 \end{cases}$ al variare di k.

Esercizio 2 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ dipendente dai parametri reali a, b, che supporremo non nulla; sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ rappresentato da A rispetto alla base canonica.

a) Determinare, se possibile, a e b in modo che $\mathrm{Im} f$ abbia dimensione 1.

b) Determinare gli autovalori di A al variare di a e b e dire per quali (eventuali) valori di a e b la matrice A è simile a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Determinare, se possibile, una base ortonormale di autovettori di f quando $a = 3, b = 4$.

Esercizio 3 Siano U e W i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^4$:

$$U = L\left[\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}\right], \quad W = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\right\}.$$

a) Determinare una base ed equazioni cartesiane di U, e una base di $U^{\perp}$.

b) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di $U^{\perp}$.

c) Trovare tutti i vettori di norma unitaria appartenenti a W e ortogonali a tutti i vettori di U.

Esercizio 4 Nello spazio sono assegnate le rette r, r' di equazioni parametriche rispettive:

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \end{cases} , \quad r': \begin{cases} x = -1 + s \\ y = 1 + s \\ z = -1 \end{cases} .$$

a) Stabilire se r e r' sono complanari o sghembe.

b) Determinare, se possibile, equazioni parametriche di una retta r'' perpendicolare e incidente sia a r che a r'. Se tale retta esiste, è unica ?

c) Calcolare il valore minimo che assume il raggio di una sfera tangente sia a r che a r' (Nota: la retta r è tangente alla sfera σ se $r \cap \sigma$ si riduce a un punto).

Esercizio 5 Si consideri la conica $\gamma_k : x^2 - 4ky^2 + 2(k-1)xy + 2x - 4y = 0$ dipendente dal parametro k.

a) Determinare i valori di k per i quali γ_k è degenere; inoltre, determinare la forma canonica di γ_k quando $k = 0$.

b) Determinare i valori di k per i quali γ_k è un'iperbole degenere; in corrispondenza di tali valori, determinare le coordinate del centro di simmetria di γ_k.

c) Determinare i valori di k per i quali γ_k è una parabola degenere; in corrispondenza di tali valori, determinare le equazioni delle rette componenti.

Esercizio 6 a) Data la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ trovare una base del sottospazio E di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ definito come segue:

$$E = \{A \in \mathbf{Mat}(2 \times 2) : AN = NA\}.$$

b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine dell'unico endomorfismo f di $\mathbf{R}^2$ tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

3) Determinare una base e la dimensione del sottospazio E di $\mathbf{Mat}(3 \times 3)$ formato dalle matrici simmetriche aventi traccia nulla.