

**Prova scritta di Geometria 20/02/2019 B**  
**Ing. Meccanica a.a. 2018/19**

Cognome ..... Nome ..... Matricola .....

*L'esame consiste di sei esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Non saranno accettati fogli di brutta copia.*

**Esercizio 1** a) Data la matrice  $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$  trovare una base del sottospazio  $E$  di  $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$  definito come segue:

$$E = \{A \in \mathbf{Mat}(2 \times 2) : AN = NA\}.$$

b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine dell'unico endomorfismo  $f$  di  $\mathbf{R}^2$  tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

3) Determinare una base e la dimensione del sottospazio  $E$  di  $\mathbf{Mat}(3 \times 3)$  formato dalle matrici triangolari superiori aventi traccia nulla.

**Esercizio 2** a) Calcolare l'area del triangolo dello spazio di vertici  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (3, 2, 4)$ ,  $C = (1, 0, 3)$ .

b) Determinare la matrice canonica della proiezione ortogonale sulla retta  $r : 3x - y = 0$ , e il simmetrico del punto  $Q = (1, 1)$  rispetto a  $r$ .

c) Discutere la compatibilità del sistema lineare 
$$\begin{cases} x - y + kz = 0 \\ y + z = k^2 - k + 1 \\ x - kz = 1 \end{cases}$$
 al variare di  $k$ .

**Esercizio 3** Siano  $U$  e  $W$  i seguenti sottospazi di  $\mathbf{R}^4$ :

$$U = L \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right], \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

a) Determinare una base ed equazioni cartesiane di  $U$ , e una base di  $U^\perp$ .

b) Trovare una base di  $U \cap W$  e una base di  $U^\perp$ .

c) Trovare tutti i vettori di norma unitaria appartenenti a  $W$  e ortogonali a tutti i vettori di  $U$ .

**Esercizio 4** Si consideri la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$  dipendente dai parametri reali  $a, b$ , che supporremo non nulla; sia  $f$  l'endomorfismo di  $\mathbf{R}^3$  rappresentato da  $A$  rispetto alla base canonica.

a) Determinare, se possibile,  $a$  e  $b$  in modo che  $\text{Im}f$  abbia dimensione 1.

b) Determinare gli autovalori di  $A$  al variare di  $a$  e  $b$  e dire per quali (eventuali) valori di  $a$  e  $b$  la matrice  $A$  è simile a  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

c) Determinare, se possibile, una base ortonormale di autovettori di  $f$  quando  $a = 3, b = 4$ .

**Esercizio 5** Nello spazio sono assegnate le rette  $r, r'$  di equazioni parametriche rispettive:

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \\ z = 1 \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = -1 \\ z = 1 + s \end{cases}.$$

a) Stabilire se  $r$  e  $r'$  sono complanari o sghembe.

b) Determinare, se possibile, equazioni parametriche di una retta  $r''$  perpendicolare e incidente sia a  $r$  che a  $r'$ . Se tale retta esiste, è unica ?

c) Calcolare il valore minimo che assume il raggio di una sfera tangente sia a  $r$  che a  $r'$  (Nota: la retta  $r$  è tangente alla sfera  $\sigma$  se  $r \cap \sigma$  si riduce a un punto).

**Esercizio 6** Si consideri la conica  $\gamma_k : 4kx^2 - y^2 - 2(k-1)xy + 4x - 2y = 0$  dipendente dal parametro  $k$ .

a) Determinare i valori di  $k$  per i quali  $\gamma_k$  è degenere; inoltre, determinare la forma canonica di  $\gamma_k$  quando  $k = 0$ .

b) Determinare i valori di  $k$  per i quali  $\gamma_k$  è un'iperbole degenere; in corrispondenza di tali valori, determinare le coordinate del centro di simmetria di  $\gamma_k$ .

c) Determinare i valori di  $k$  per i quali  $\gamma_k$  è una parabola degenere; in corrispondenza di tali valori, determinare le equazioni delle rette componenti.