

Prova scritta di Geometria 20/02/2019 D
Ing. Meccanica a.a. 2018/19

Cognome Nome Matricola

L'esame consiste di sei esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Non saranno accettati fogli di brutta copia.

Esercizio 1 a) Calcolare l'area del triangolo dello spazio di vertici $A = (1, 1, -1)$, $B = (2, 3, -4)$, $C = (0, 1, -3)$.

b) Determinare la matrice canonica della proiezione ortogonale sulla retta $r : x + 3y = 0$, e il simmetrico del punto $Q = (1, 1)$ rispetto a r .

c) Discutere la compatibilità del sistema lineare
$$\begin{cases} x - y + kz = 0 \\ x + z = k^2 + k + 1 \\ y + kz = 1 \end{cases}$$
 al variare di k .

Esercizio 2 Siano U e W i seguenti sottospazi di \mathbf{R}^4 :

$$U = L \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right], \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

a) Determinare una base ed equazioni cartesiane di U , e una base di U^\perp .

b) Trovare una base di $U \cap W$ e una base di U^\perp .

c) Trovare tutti i vettori di norma unitaria appartenenti a W e ortogonali a tutti i vettori di U .

Esercizio 3 Nello spazio sono assegnate le rette r, r' di equazioni parametriche rispettive:

$$r : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = -1 + t \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} x = -1 - s \\ y = 1 - s \\ z = -1 \end{cases} .$$

a) Stabilire se r e r' sono complanari o sghembe.

b) Determinare, se possibile, equazioni parametriche di una retta r'' perpendicolare e incidente sia a r che a r' . Se tale retta esiste, è unica ?

c) Calcolare il valore minimo che assume il raggio di una sfera tangente sia a r che a r' (Nota: la retta r è tangente alla sfera σ se $r \cap \sigma$ si riduce a un punto).

Esercizio 4 Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ b & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dipendente dai parametri reali a, b , che supporremo non nulla; sia f l'endomorfismo di \mathbf{R}^3 rappresentato da A rispetto alla base canonica.

a) Determinare, se possibile, a e b in modo che $\text{Im} f$ abbia dimensione 1.

b) Determinare gli autovalori di A al variare di a e b e dire per quali (eventuali) valori di a e b la matrice A è simile a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Determinare, se possibile, una base ortonormale di autovettori di f quando $a = b = 1$.

Esercizio 5 Si consideri la conica $\gamma_k : x^2 - 4ky^2 - 2(k-1)xy + 2x + 4y = 0$ dipendente dal parametro k .

a) Determinare i valori di k per i quali γ_k è degenere; inoltre, determinare la forma canonica di γ_k quando $k = 0$.

b) Determinare i valori di k per i quali γ_k è un'iperbole degenere; in corrispondenza di tali valori, determinare le coordinate del centro di simmetria di γ_k .

c) Determinare i valori di k per i quali γ_k è una parabola degenere; in corrispondenza di tali valori, determinare le equazioni delle rette componenti.

Esercizio 6 a) Data la matrice $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ trovare una base del sottospazio E di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ definito come segue:

$$E = \{A \in \mathbf{Mat}(2 \times 2) : AN = NA\}.$$

b) Determinare una base del nucleo e una base dell'immagine dell'unico endomorfismo f di \mathbf{R}^2 tale che

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3) Determinare una base e la dimensione del sottospazio E di $\mathbf{Mat}(3 \times 3)$ formato dalle matrici simmetriche aventi traccia nulla.