Parte 4: Forme fondamentali e curvatura

Alessandro Savo, Geometria Differenziale 2017-18

Indice delle sezioni

1 Prima forma fondamentale

Sia $f : \Omega \to \mathbf{R}^3$ una parametrizzazione regolare di una superficie Σ:

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$$

quindi $f(\Omega) = \Sigma$ e i vettori $f_u = \dfrac{\partial f}{\partial u}, f_v = \dfrac{\partial f}{\partial v} \in \mathbf{R}^3$ sono, per ipotesi, linearmente indipendenti.

1.1 Immersioni iniettive

D'ora in poi supporremo che Ω è un aperto di $\mathbf{R}^2$ e che la parametrizzazione $f : \Omega \to \mathbf{R}$ è *iniettiva*. In questo modo la superficie $\Sigma = f(\Omega)$ è in corrispondenza biunivoca con Ω, che è anche detto *carta locale*. Le coordinate $(u, v) \in \Omega$ saranno chiamate *coordinate locali* sulla superficie.
Infine, adotteremo spesso la notazione:

$$E_1 = f_u, \quad , E_2 = f_v.$$

1.2 Piano tangente a una superficie in un punto

Definizione 1. *Sia $p = f(u, v)$ un punto di Σ. Il sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ generato dai vettori E_1, E_2, che denoteremo con il simbolo $T_p\Sigma$, è detto* piano tangente a Σ in p.

• In quanto sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$, il piano tangente si identifica con un piano dello spazio euclideo passante per l'origine. Notiamo che il piano affine tangente in $p \in \Sigma$, definito nella sezione precedente, è il piano dello spazio euclideo passante per p e parallelo a $T_p\Sigma$.

Quindi $T_p\Sigma$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2, che varia con il punto p, e che ha base $\mathcal{B} = (f_u, f_v)$. Notiamo che $T_p\Sigma$ è anche il sottospazio di $\mathbf{R}^3$ ortogonale al versore normale di Σ in p, definito da:

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}.$$

1.3 Curve su superfici

Sia $f : \Omega \to \Sigma$ una parametrizzazione regolare della superficie Σ. Data una curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$ è evidente che la curva dello spazio $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ immagine di γ, ovvero la curva $\alpha(t) = f(\gamma(t))$, è interamente contenuta in Σ, perchè $\alpha(t) \in \Sigma$ per ogni t. Se $\gamma(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ allora

$$\alpha(t) = f(u(t), v(t)).$$

• La curva γ si dice *pre-immagine* della curva α.

Diremo che $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ è una *curva di* Σ, e scriveremo $\alpha : [a, b] \to \Sigma$, se α è immagine di una curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$.

Proposizione 2. a) *Sia α una curva di Σ con curva pre-immagine γ. Allora α è regolare se e solo se γ è regolare.*
b) *Per ogni $p \in \Sigma$ si ha:*

$$T_p\Sigma = \{\alpha'(0) : \alpha(t) \text{ è una curva di } \Sigma, \text{ tale che } \alpha(0) = p\}.$$

Più in generale si ha che, se la curva $\alpha(t)$ è una curva di Σ, allora $\alpha'(t) \in T_{\alpha(t)}\Sigma$.

Dimostrazione. a) Verifichiamo che, se $\gamma = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ è regolare, allora la curva immagine $\alpha = f \circ \gamma$ è regolare. Infatti, dalla regola di derivazione delle funzioni composte:

$$\alpha'(t) = f_u(u(t), v(t))u'(t) + f_v(u(t), v(t))v'(t)$$

che scriveremo brevemente

$$\alpha'(t) = u'(t)f_u + v'(t)f_v. \tag{1}$$

Poichè i vettori f_u, f_v sono linearmente indipendenti, $\alpha'(t)$ si annulla se e solo se $u'(t) = v'(t) = 0$; ma questo non succede perchè per ipotesi γ è regolare. Dunque α è regolare. La (1) mostra anche che se α, in quanto curva dello spazio, è regolare, allora γ è regolare.

b) La (1) implica immediatamente che $\alpha'(t)$, essendo combinazione lineare dei vettori di una base di $T_{\alpha(t)}\Sigma$, è un vettore di tale piano tangente per ogni t (in particolare, per $t = 0$). Viceversa, sia X un vettore del piano tangente $T_p\Sigma$, che possiamo scrivere

$$X = af_u + bf_v$$

con $a, b \in \mathbf{R}$ opportuni. Sia $p = f(u_0, v_0)$. Si vede facilmente che, se $\gamma(t) = \begin{pmatrix} u_0 + at \\ v_0 + bt \end{pmatrix}$, e se $\alpha(t) = f(\gamma(t))$, allora $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X$. □

1.4 Forme bilineari e prodotti scalari

Sia V^n uno spazio vettoriale di dimensione n. Una *forma bilineare* definita su V è un'applicazione $\beta : V \times V \to \mathbf{R}$ che è lineare se ristretta a ciascuno dei suoi due argomenti. Quindi le seguenti proprietà devono essere verificate, per ogni scelta di $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$ e $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} \beta(a_1v_1 + a_2v_2, w) = a_1\beta(v_1, w) + a_2\beta(v_2, w) \\ \beta(v, a_1w_1 + a_2w_2, w) = a_1\beta(v, w_1) + a_2\beta(v, w_2) \end{cases}$$

Tale β si dice *simmetrica* se, per ogni $v, w \in V$:

$$\beta(v, w) = \beta(w, v),$$

e, infine, si dice *definita positiva* se, per ogni $v \in V$:

$$\beta(v, v) \geq 0, \text{ e inoltre } \beta(v, v) = 0 \text{ se e solo se } v = 0.$$

• *Una forma bilineare simmetrica e definita positiva si dice anche* prodotto scalare *definito su V.*

Esempio. Il prodotto scalare detto *canonico* di $\mathbf{R}^n$, che è denotato con $\beta(x, y) \doteq \langle x, y\rangle$: ricordiamo che, se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ allora

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

Esempio. Sia V un sottospazio di $\mathbf{R}^n$. Il prodotto scalare canonico $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induce un prodotto scalare su V, in questo modo:

$$\beta(v, w) = \langle v, w\rangle,$$

per ogni $v, w \in V$. Diremo anche che β è la *restrizione* del prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^n$ a V.

Sia ora β una forma bilineare su V, e fissiamo una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V^n. Si ponga:

$$\beta_{ij} = \beta(v_i, v_j).$$

Allora la matrice $B = (\beta_{ij})$ cosi' ottenuta si dice *matrice della forma bilineare β nella base $\mathcal{B}$*. Se X (risp. Y) sono le coordinate del vettore v (risp. w) rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora si verifica facilmente che

$$\beta(v, w) = X^t B Y.$$

1.5 Prima forma fondamentale

Sia $f : \Omega \to \Sigma$ una parametrizzazione regolare di una superficie Σ, dove $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, e sia $p = f(u, v)$ un punto di Σ.

• *La restrizione del prodotto scalare canonico di $\mathbf{R}^3$ al piano tangente $T_p\Sigma$ è detta* prima forma fondamentale *della parametrizzazione. Tale prodotto scalare sara' denotato con I_p.*

Dunque, se $X, Y \in T_p\Sigma$, porremo per definizione:

$$I_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle.$$

Sappiamo che i vettori f_u, f_v formano una base di $T_p\Sigma$. Rispetto a tale base la matrice della prima forma fondamentale, denotata con g_p, è data da

$$g_p = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

dove

$$g_{11} = \langle f_u, f_u \rangle, \ g_{12} = \langle f_u, f_v \rangle, \ g_{22} = \langle f_v, f_v \rangle.$$

Notiamo che g dipende dal punto p, quindi dalle coordinate (u, v).

• Spesso ometteremo di scrivere esplicitamente la dipendenza di g da p, e scriveremo semplicemente g; diremo anche che g è la prima forma fondamentale nelle coordinate (u, v).

Esempio. Sia Σ la superficie di rotazione ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$ del piano xz. Se il parametro t varia nell'intervallo $[a, b]$, otteniamo la parametrizzazione $f : \Omega \to \Sigma$ dove

$$f(\theta, t) = \begin{pmatrix} x(t)\cos\theta \\ x(t)\sin\theta \\ z(t) \end{pmatrix},$$

e $\Omega = [0, 2\pi] \times [a, b]$.
Il piano tangente a Σ nel punto $p = f(\theta, t)$ ha per base la coppia di vettori f_θ, f_t, dove:

$$f_\theta = \begin{pmatrix} -x(t)\sin\theta \\ x(t)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_t = \begin{pmatrix} x'(t)\cos\theta \\ x'(t)\sin\theta \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$g_{11} = \langle f_\theta, f_\theta \rangle = x(t)^2, \; g_{12} = \langle f_\theta, f_t \rangle = 0, \; g_{22} = \langle f_t, f_t \rangle = x'(t)^2 + y'(t)^2.$$

In altre parole, la prima forma fondamentale ha matrice

$$g(\theta, t) = \begin{pmatrix} x(t)^2 & 0 \\ 0 & x'(t)^2 + y'(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che g è diagonale: ciò è dovuto al fatto che le linee coordinate $\theta = c$ e $t = c$ sono ortogonali tra loro, in ogni punto. Inoltre, g non dipende da θ, ma solo da t. Infine osserviamo che, se il parametro t è l'ascissa curvilinea sulla curva α, allora g si semplifica notevolmente, assumendo la forma

$$g(\theta, t) = \begin{pmatrix} x(t)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.6 Area di una superficie

Sia $f : \Omega \to \Sigma$ una parametrizzazione regolare di una superficie Σ; dunque $f(\Omega) = \Sigma$.

- Assumeremo f iniettiva, cosicché f è un'applicazione biunivoca.

Definizione 3. *Sia $g = g(u, v)$ la matrice della prima forma fondamentale nelle coordinate (u, v) di Ω. Allora definiamo area di Σ l'integrale doppio:*

$$\text{Area}(\Sigma) = \int_\Omega \sqrt{\det g}\, dudv.$$

Piu' in generale, data una funzione continua $h : \Sigma \to \mathbf{R}$ (cioè tale che $h \circ f : \Omega \to \mathbf{R}$ sia continua), definiamo integrale di h su Σ la quantità:

$$\int_\Sigma h\, d\Sigma \doteq \int_\Omega h(f(u, v))\sqrt{\det g}(u, v)\, dudv$$

(se l'integrale esiste finito).

Esempio. Nel caso di una superficie di rotazione parametrizzata come nella sezione precedente (e assumendo $x(t) > 0$), vediamo che

$$\sqrt{\det g} = x(t)\sqrt{x'(t)^2 + y(t)^2}.$$

Dunque $\sqrt{\det g}$ non dipende da θ; prendendo $\Omega = [0, 2\pi) \times [a, b]$ la parametrizzazione è iniettiva e dunque l'area di $\Sigma = f(\Omega)$ è, con facili calcoli:

$$\text{Area}(\Sigma) = 2\pi \int_a^b x(t) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt,$$

che coincide con la formula già introdotta in precedenza.

2 Derivata direzionale

2.1 Derivata di una funzione lungo un vettore

Sia $f : \Omega \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile definita su un aperto Ω di $\mathbf{R}^k$. Dato un punto $p \in \Omega$ e un vettore $X \in \mathbf{R}^k$, ricordiamo che la *derivata di f in p lungo X* è il limite

$$\nabla_X f(p) \doteq \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tX) - f(p)}{t}.$$

Notiamo che possiamo anche scrivere

$$\nabla_X f(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(p + tX).$$

Se $(e_1, \ldots, e_k)$ è la base canonica di $\mathbf{R}^k$, si ha, dalla definizione stessa di derivata parziale:

$$\nabla_{e_j} f(p) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p).$$

Le seguenti proprieta' sono ben note.

Teorema 4. *Tale derivata è lineare nell'argomento "direzione": per ogni $X, Y \in \mathbf{R}^k$ e per ogni $c \in \mathbf{R}$:*

$$\begin{cases} \nabla_{X+Y} f(p) = \nabla_X f(p) + \nabla_Y f(p) \\ \nabla_{cX} f(p) = c \nabla_X f(p) \end{cases}$$

e soddisfa la regola del prodotto: per ogni coppia di funzioni f, h si ha:

$$\nabla_X (fh)(p) = h(p) \nabla_X f(p) + f(p) \nabla_X h(p).$$

Omettendo per semplicità la dipendenza da p, scriveremo brevemente:

$$\nabla_X (fh) = h \nabla_X f + f \nabla_X h.$$

Vediamo ora come calcolare la derivata direzionale conoscendo le derivate parziali. Se $(e_1, \ldots, e_k)$ è la base canonica di $\mathbf{R}^k$, allora sappiamo che $\nabla_{e_j} f(p) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(p)$; dunque, se $X = a_1 e_1 + \cdots + a_k e_k$ si ha, dalla proprietà di linearità:

$$\nabla_X f(p) = \sum_{j=1}^k a_j \nabla_{e_j} f(p) = \sum_{j=1}^k a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(p) = \langle \nabla f(p), X \rangle.$$

Ovvero:

$$\nabla_X f(p) = \langle \nabla f(p), X \rangle$$

dove $\nabla f(p)$ è il gradiente della funzione f nel punto p:

- *La derivata di f lungo il vettore X è il prodotto scalare del gradiente di f con X.*

Esempio. Sia $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_2^2$, fissiamo $p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Allora

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -6x_2 \end{pmatrix}, \quad \text{quindi} \quad \nabla f(p) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Si ha allora

$$\nabla_X f(p) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle = -10.$$

La proposizione che segue dice che per calcolare la derivata direzionale in p lungo X possiamo restringere f ad una qualunque curva che passi per p e che abbia, in p, vettore velocita' uguale a X: questa proprietà ci sara' utile per generalizzare la nozione di differenziale alle superfici.

Proposizione 5. *Sia $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile e sia $\alpha(t)$ una curva di Ω tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X$. Allora:*

$$\nabla_X f(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\alpha(t)). \tag{2}$$

Il risultato è indipendente dalla curva α con le date proprietà.

Dimostrazione. Scriviamo

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \end{pmatrix} \quad \text{cosicché} \quad \begin{pmatrix} x_1'(0) \\ \vdots \\ x_k'(0) \end{pmatrix} = X$$

Dalla regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$\frac{d}{dt} f(\alpha(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1} x_1'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k} x_k'(t)$$

quindi per $t = 0$ otteniamo

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} f(\alpha(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) x_1'(0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(p) x_k'(0) = \langle \nabla f(p), X \rangle = \nabla_X f(p).$$

$\square$

2.2 Derivata di una funzione lungo un campo di vettori

Un campo di vettori definito su un dominio $\Omega \subseteq \mathbf{R}^k$ è un'applicazione che associa a ogni punto $p \in \Omega$ un vettore $X(p) \in \mathbf{R}^n$:

$$X : \Omega \to \mathbf{R}^n.$$

Dunque X si esprime con le sue componenti:

$$X(p) = \begin{pmatrix} a_1(p) \\ \vdots \\ a_n(p) \end{pmatrix}$$

ciascuna delle quali è funzione di $p = (x_1, \ldots, x_k)$, oppure mediante la base canonica:

$$X(p) = a_1(p)e_1 + \cdots + a_n(p)e_n.$$

Un esempio di campo di vettori è dato dal gradiente di una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Data una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ e dato un campo di vettori $X : \Omega \to \mathbf{R}^k$, possiamo definire la derivata di f lungo X, punto per punto, come nel caso precedente. Il risultato sara' una funzione $\nabla_X f$ che associa a ogni $p \in \Omega$ la derivata di f lungo il vettore $X(p)$:

$$p \mapsto \nabla_{X(p)} f(p).$$

Ovviamente si ha:

$$\nabla_X f = \langle \nabla f, X \rangle$$

punto per punto.

Esempio. Se $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_2^2$ e X è il campo di vettori $X(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ allora

$$\langle \nabla f, X \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -6x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix} \rangle = 8x_1x_2.$$

Quindi

$$\nabla_X f(x_1, x_2) = 8x_1x_2.$$

2.3 Derivata direzionale di una funzione vettoriale, matrice jacobiana

Se $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ è una funzione vettoriale, cioè a valori in $\mathbf{R}^n$, vale la stessa definizione di derivata direzionale data precedentemente; in questo caso

$$f(x_1,\dots,x_k) = \begin{pmatrix} f_1(x_1,\dots,x_k) \\ f_2(x_1,\dots,x_k) \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_k) \end{pmatrix}$$

e ciascuna componente f_i è funzione di $x_1,\dots,x_k$. La derivata direzionale di f lungo X si fa componente per componente:

$$\nabla_X f = \begin{pmatrix} \nabla_X f_1 \\ \nabla_X f_2 \\ \vdots \\ \nabla_X f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1, X\rangle \\ \langle \nabla f_2, X\rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_n, X\rangle \end{pmatrix}.$$

La derivata direzionale si esprime mediante la *matrice jacobiana* della funzione f, definita come:

$$\mathrm{Jac} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \end{pmatrix}.$$

Proposizione 6. *Se* $X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$ *(dove, s'intende,* $a_1,\dots a_k$ *sono funzioni di* $(x_1,\dots,x_k)$*) allora*

$$\nabla_X f = \mathrm{Jac} f \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$$

dove il punto indica il prodotto righe per colonne della matrice jacobiana di f *per il vettore colonna delle componenti di* X*.*

Esempio. Si consideri l'applicazione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

La matrice jacobiana è:

$$\mathrm{Jac} f = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ x_2 & x_1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Se X è il campo di vettori

$$X(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix},$$

allora la derivata di f lungo X è la funzione

$$\nabla_X f = \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ x_2 & x_1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

ovvero

$$\nabla_X f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4x_1 x_2 \\ -x_1^2 + x_2^2 \\ -2x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

È chiaro che la derivata direzionale di una funzione vettoriale è lineare nell'argomento "direzione": per ogni coppia di campi di vettori X, Y e per ogni funzione reale $\phi : \Omega \subseteq \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} \nabla_{X+Y} f = \nabla_X f + \nabla_Y f \\ \nabla_{\phi X} f = \phi \nabla_X f \end{cases}$$

Supponiamo ora che f e h siano due funzioni vettoriali definite su $\Omega \subseteq \mathbf{R}^k$, a valori in $\mathbf{R}^n$. Allora la funzione $\langle f, h \rangle$, definita come prodotto scalare, punto per punto:

$$\langle f, h \rangle(p) \doteq \langle f(p), h(p) \rangle$$

è ovviamente differenziabile, ed è a valori reali:

$$\langle f, h \rangle : \Omega \to \mathbf{R}.$$

Ricordando l'espressione esplicita del prodotto scalare, vediamo che vale la regola di Leibniz, nella seguente forma:

$$\nabla_X \langle f, h \rangle = \langle \nabla_X f, h \rangle + \langle f, \nabla_X h \rangle.$$

Infine, se $f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ e $\phi : \Omega \to \mathbf{R}$ allora la funzione ϕf è a valori in $\mathbf{R}^n$:

$$\phi f : \Omega \to \mathbf{R}^n,$$

e la regola di Leibniz prende la forma:

$$\nabla_X (\phi f) = (\nabla_X \phi) f + \phi \nabla_X f.$$

2.4 Derivata direzionale di una funzione definita su una superficie

Sia $\phi : \Sigma \to \mathbf{R}^n$ una funzione vettoriale definita sulla superficie regolare Σ parametrizzata da $f : \Omega \to \mathbf{R}^3$ (che assumeremo di classe C^∞). Diremo anche che ϕ è un *campo di vettori definito su* Σ.

• Diremo che ϕ è differenziabile di classe C^k in Σ se $\phi \circ f : \Omega \to \mathbf{R}^n$ è differenziabile di classe C^k in Ω.

Sia p un punto di Σ e X un vettore tangente alla superficie in p.

• Definiamo *derivata direzionale di ϕ lungo X* la derivata:

$$\nabla_X \phi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\phi(\alpha(t))$$

dove $\alpha(t)$ è una qualunque curva integrale di X in p, ovvero è tale che:

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = X.$$

Vediamo come calcolare. Se $X = f_u$, allora una curva integrale di X in $p = f(u_0, v_0)$ è $\alpha(t) = f(u_0 + t, v_0)$, dunque:

$$\nabla_{f_u}\phi(p) = \frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial u}(u_0, v_0)$$

che scriveremo semplicemente cosi'

$$\nabla_{f_u}\phi = \frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial u}.$$

Analogamente

$$\nabla_{f_v}\phi = \frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial v}.$$

Notiamo che, identificando p con $f(p)$, quindi ϕ con $\phi \circ f$:

$$\nabla_{f_u} f_u = f_{uu}, \quad \nabla_{f_u} f_v = f_{uv} = f_{vu}, \quad \nabla_{f_v} f_v = f_{vv}$$

Abbiamo le seguenti conseguenze.

Lemma 7. a) *La derivata direzionale $\nabla_X \phi$ è lineare nell'argomento "direzione": per ogni $X, Y \in T_p\Sigma$ e $c \in \mathbf{R}$:*

$$\begin{cases} \nabla_{X+Y}\phi = \nabla_X\phi + \nabla_Y\phi \\ \nabla_{cX}\phi = c\nabla_X\phi \end{cases}$$

b) *Sia $\phi : \Sigma \to \mathbf{R}^n$ e $X \in T_p\Sigma$. Se $X = a_1E_1 + a_2E_2$ allora*

$$\nabla_X\phi = a_1\frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial u} + a_2\frac{\partial(\phi \circ f)}{\partial v}.$$

c) *Vale la regola di Leibniz: se ϕ, ξ sono campi di vettori definiti su Σ allora $\langle \phi, \xi \rangle$ è a valori reali e si ha:*

$$\nabla_X\langle \phi, \xi \rangle = \langle \nabla_X\phi, \xi \rangle + \langle \phi, \nabla_X\xi \rangle.$$

3 Seconda forma fondamentale

Sia Σ una superficie regolare; dunque $\Sigma = f(\Omega)$ dove $f : \Omega \to \mathbf{R}^3$ è un'immersione iniettiva. Ricordiamo i vettori tangenti

$$E_1 = f_u, \quad E_2 = f_v;$$

essi formano una base di $T_p\Sigma$. Resta inoltre definito il campo di versori normali N di Σ, che nel punto $p = f(u, v)$ è dato da

$$N = \frac{1}{|E_1 \wedge E_2|} E_1 \wedge E_2.$$

3.1 Sezioni normali

• Una *sezione normale* di Σ nel punto p è la curva α che si ottiene come intersezione di Σ con un piano per p contenente N.

Fissato un vettore $X \in T_p\Sigma$ di norma unitaria, resta definita un'unica sezione normale: quella che si ottiene come intersezione di Σ con il piano per p contenente N e X. Denoteremo tale sezione normale con α_X.

• Si verifica che α_X è una curva regolare.

Poniamo $\alpha_X(0) = p$ e parametrizziamo α con l'ascissa curvilinea; dunque in particolare si ha $X = \alpha'_X(0)$. Notiamo che il versore normale a Σ è anche ortogonale alla curva nel punto p. Ora $\alpha''(s)$ è sempre ortogonale ad $\alpha'(s)$; dunque $\alpha''_X(0)$ è parallelo a N. Ricordiamo che la curvatura di una curva dello spazio è data da $|\alpha''_X(0)|$.

La quantità:

$$\langle \alpha''_X(0), N \rangle \doteq k_X(p)$$

è la curvatura (con segno) della sezione normale individuata da X.

• Definiremo $k_X(p)$ *curvatura normale di* Σ *in* p*, nella direzione* X.

Quindi $k_X(p)$ misura la curvatura, con segno, della sezione normale individuata dal versore tangente X. Se $k_X(p) = 0$ diremo che X *è una direzione asintotica in* p.

Esempi.

• Se Σ è un piano, in un qualunque suo punto le sezioni normali sono rette, quindi la curvatura normale in una qualunque direzione è nulla. Tutte le direzioni sono asintotiche.

• Se Σ è una sfera di raggio R, e p è un suo punto arbitrario, si vede facilmente che le sezioni normali in p sono i cerchi massimi passanti per p. Dunque le curvature normali non dipendono dalla direzione, e valgono tutte $\frac{1}{R}$, oppure tutte $-\frac{1}{R}$ (il segno dipende dalla scelta del versore normale). Non ci sono direzioni asintotiche.

3.2 Seconda forma fondamentale

Se $X \in T_p\Sigma$ poniamo
$$W(X) = -\nabla_X N, \tag{4}$$
dove N è il campo di versori normali a Σ. Notiamo che $\nabla_X N \in \mathbf{R}^3$. Poiché N ha norma costante, si avra':
$$\nabla_X \langle N, N\rangle = 0.$$
Per la regola di Leibniz e la simmetria del prodotto scalare abbiamo che
$$\nabla_X \langle N, N\rangle = \langle \nabla_X N, N\rangle + \langle N, \nabla_X N\rangle = 2\langle \nabla_X N, N\rangle.$$
Dunque $\nabla_X N$ è in ogni punto ortogonale a N, e quindi appartiene a $T_p\Sigma$. Poiché la derivata direzionale $\nabla_X N$ è lineare nell'argomento X, la (4) definisce un'applicazione lineare
$$W : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$$
detta *operatore di Weingarten*. La forma bilineare definita su $T_p\Sigma$:
$$II_p(X, Y) \doteq \langle W(X), Y\rangle$$
è detta *seconda forma fondamentale* di Σ in p. Spesso ometteremo di esplicitare la dipendenza dal punto p.

Proposizione 8. a) *La seconda forma fondamentale è simmetrica in X e Y, dunque l'operatore di Weingarten è simmetrico rispetto al prodotto scalare canonico di $T_p\Sigma$.*
b) *La matrice associata a II rispetto alla base $\mathcal{B} = (E_1, E_2)$ di $T_p\Sigma$ è*
$$l = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}$$
dove:
$$l_{11} = \langle f_{uu}, N\rangle,\ l_{12} = \langle f_{uv}, N\rangle,\ l_{22} = \langle f_{vv}, N\rangle.$$
c) *La matrice w, associata all'operatore di Weingarten rispetto alla base $\mathcal{B}$ è*
$$w = g^{-1} l.$$
d) *La curvatura normale nella direzione $X \in T_p\Sigma$ (si assuma $|X| = 1$) è:*
$$k_X(p) = II_p(X, X).$$

Dimostrazione. Cominciamo col dimostrare b). Per definizione $l_{11} = II(E_1, E_1)$. Ora $\langle N, E_j\rangle$ è identicamente nullo e, per la regola di Leibniz:
$$\begin{aligned} l_{11} &= II(E_1, E_1) \\ &= -\langle \nabla_{E_1} N, E_1\rangle \\ &= -\nabla_{E_1}\langle N, E_1\rangle + \langle N, \nabla_{E_1} E_1\rangle. \end{aligned}$$

Ora $\langle N, E_1 \rangle = 0$ identicamente, dunque ogni sua derivata è nulla; d'altra parte $\nabla_{E_1} E_1 = \nabla_{f_u} f_u = f_{uu}$. Otteniamo

$$l_{11} = \langle N, f_{uu} \rangle.$$

Analogamente $l_{22} = \langle N, f_{vv} \rangle$ e $l_{12} = \langle N, f_{uv} \rangle$. Poichè $f_{uv} = f_{vu}$ si ha infine $l_{12} = l_{21}$ e la matrice della seconda forma fondamentale è simmetrica.

a) Per la parte b), la matrice che rappresenta II nella base $\mathcal{B}$ è simmetrica, dunque $II(X, Y) = II(Y, X)$ per ogni X, Y e II è una forma simmetrica. Di conseguenza, anche l'operatore W è simmetrico (per definizione).

c) Sia $w = (w_{ij})$. Per definizione di matrice associata a W rispetto alla base (E_1, E_2):

$$W(f_i) = \sum_{k=1}^{2} w_{ki} E_k.$$

Sia g la matrice della prima forma fondamentale. Allora $g_{kj} = g_{jk}$ e:

$$l_{ij} = \langle W(E_i), E_j \rangle = \sum_{k=1}^{2} w_{ki} \langle E_k, E_j \rangle = \sum_{k=1}^{2} w_{ki} g_{kj} = \sum_{k=1}^{2} g_{jk} w_{ki} = (gw)_{ji}.$$

Ora $l_{ij} = l_{ji}$ e quindi $l_{ji} = (gw)_{ji}$ per ogni i, j. In conclusione

$$l = gw, \quad \text{ovvero} \quad w = g^{-1} l.$$

d) Sia $\alpha : [-\epsilon, \epsilon] \to \Sigma$ una curva contenuta in Σ e parametrizzata dall'ascissa curvilinea s. Sappiamo che $\alpha'(s) \in T_{\alpha(s)}\Sigma$ per ogni s. Dunque

$$\langle \alpha'(s), N(\alpha(s)) \rangle = 0$$

per ogni s. Derivando rispetto a s, abbiamo:

$$0 = \langle \alpha''(s), N(\alpha(s)) \rangle + \langle \alpha'(s), \frac{d}{ds} N(\alpha(s)) \rangle.$$

Supponiamo che

$$\alpha(0) = p, \quad \alpha'(0) = X$$

Si ha dunque, per definizione di derivata direzionale:

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} N(\alpha(s)) = \nabla_X N$$

e ponendo $s = 0$ nell'identità precedente, otteniamo:

$$0 = \langle \alpha''(0), N \rangle + \langle X, \nabla_X N \rangle = \langle \alpha''(0), N \rangle - II(X, X)$$

ovvero

$$\langle \alpha''(0), N\rangle = II(X, X).$$

Applicando tale identità alla sezione normale α_X definita da X otteniamo

$$k_X(p) = \langle \alpha_X''(0), N\rangle = II(X, X).$$

□

Lemma 9. *Sia $W : V \to V$ un operatore di uno spazio vettoriale V di dimensione 2, che assumeremo dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot\rangle$. Supponiamo che W sia simmetrico rispetto a $\langle \cdot, \cdot\rangle$, nel senso che*

$$\langle W(X), Y\rangle = \langle X, W(Y)\rangle,$$

per ogni $X, Y \in V$. Allora:

a) *V ammette una base ortonormale (v_1, v_2) formata da autovettori di W.*

b) *Siano $k_1 \leq k_2$ gli autovalori di W relativi, rispettivamente, a v_1 e v_2, e sia X_θ il vettore unitario di V che forma un angolo $\theta \in [0, 2\pi)$ con v_1. Allora*

$$\langle W(X_\theta), X_\theta\rangle = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

In particolare,

$$\begin{array}{l} k_1 = \min\{\langle W(X), X\rangle : X \in V, |X| = 1\} \\ k_2 = \max\{\langle W(X), X\rangle : X \in V, |X| = 1\} \end{array}.$$

e k_1 (risp. k_2) è il valore minimo (risp. il valore massimo) che assume la forma quadratica $X \to \langle W(X), X\rangle$ ristretta ai vettori di norma unitaria.

Dimostrazione. La parte a) è un risultato ben noto di algebra lineare. Dimostriamo b). Sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ una base ortonormale di autovettori. Un vettore unitario X si esprime:

$$X = a_1 v_1 + a_2 v_2 \quad \text{con} \quad a_1^2 + a_2^2 = 1.$$

Ora X forma con v_1 un angolo θ se e solo se $\langle X, v_1\rangle = \cos\theta$. Dunque il vettore X_θ si esprime:

$$X_\theta = \cos\theta \cdot v_1 + \sin\theta \cdot v_2.$$

Ne segue che $W(X_\theta) = k_1 \cos\theta \cdot v_1 + k_2 \sin\theta \cdot v_2$ e in conclusione

$$\langle W(X_\theta), X_\theta\rangle = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

È chiaro che il valore minimo (risp. il valore massimo) di $\langle W(X_\theta), X_\theta\rangle$ è k_1 (risp. k_2). □

4 Curvature di una superficie

Sia Σ una superficie parametrizzata dall'applicazione $f : \Omega \to \Sigma$, e sia $W : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$ l'operatore di Weingarten. Siano $k_1 \leq k_2$ gli autovalori di W e sia (v_1, v_2) una base ortonormale di autovettori.

• k_1 e k_2 sono dette *curvature principali* di Σ in p; gli autovettori v_1, v_2, associati rispettivamente a k_1, k_2 sono detti *direzioni principali* di Σ in p.

Quindi, le direzioni principali sono tra loro ortogonali (se $k_1 = k_2$ tutte le direzioni sono principali, e il punto si dice allora *ombelicale*). Applichiamo il lemma precedente all'operatore W. Poichè

$$\langle W(X), X\rangle = II(X, X),$$

dove II è la seconda forma fondamentale, si ha, ricordando che $II(X, X)$ è la curvatura normale individuata da X e N, il seguente risultato, dovuto a Eulero.

Teorema 10. *Sia k_X la curvatura (con segno) della sezione normale corrispondente al versore $X \in T_p\Sigma$. Se X forma un angolo θ con la direzione principale associata alla curvatura principale k_1, allora:*

$$k_X = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

Notiamo allora che, se il punto è ombelicale: $k_1 = k_2$, allora k_X è costante; se $k_1 < k_2$ allora k_1 (risp. k_2) è il valore minimo (risp. il valore massimo) della curvatura normale di Σ in p.

4.1 Curvatura gaussiana, curvatura media

Sia Σ una superficie dello spazio, sia $p \in \Sigma$ e siano $k_1(p), k_2(p)$ le curvature principali di Σ in p.

• La *curvatura gaussiana* $K(p)$ di una superficie nel punto p è il prodotto delle curvature principali:

$$K(p) = k_1(p)k_2(p).$$

• La *curvatura media* $H(p)$ di Σ è la media aritmetica delle curvature principali:

$$H(p) = \frac{k_1(p) + k_2(p)}{2}.$$

Teorema 11. *Siano*

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{12} & l_{22} \end{pmatrix}$$

le matrici della prima e seconda forma fondamentale, rispettivamente. Allora

a) *La matrice dell'operatore di Weingarten è: $w = g^{-1}l$.*

b) *Le curvature principali sono gli autovalori di w.*

c) *La curvatura gaussiana è data da* $K = \dfrac{\det l}{\det g}$, *ovvero:*

$$K = \frac{l_{11}l_{22} - l_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

d) *La curvatura media è data da* $H = \frac{1}{2}\operatorname{tr} w$ *ovvero:*

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{l_{11}g_{22} + l_{22}g_{11} - 2l_{12}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Dimostrazione. a) e b) sono già note. Sappiamo che, per una qualunque matrice w di ordine 2 con autovalori k_1, k_2, si ha:

$$\det w = k_1 k_2, \;\; \operatorname{tr} w = k_1 + k_2.$$

c) e d) sono facili conseguenze di questa osservazione. □

4.2 Esempio

Calcoliamo le curvature principali di una superficie di rotazione:

$$f(\theta, t) = \begin{pmatrix} x(t)\cos\theta \\ x(t)\sin\theta \\ z(t) \end{pmatrix}$$

dove $(\theta, t) \in [0, 2\pi] \times [a, b]$ e dove si assume $x(t) > 0$ su $[a, b]$. Ricordiamo che Σ è ottenuta per rotazione della curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$ (dove $t \in [a, b]$) intorno all'asse z. Abbiamo:

$$f_\theta = \begin{pmatrix} -x(t)\sin\theta \\ x(t)\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_t = \begin{pmatrix} x'(t)\cos\theta \\ x'(t)\sin\theta \\ z'(t) \end{pmatrix}.$$

La prima forma fondamentale ha matrice

$$g(\theta, t) = \begin{pmatrix} x(t)^2 & 0 \\ 0 & x'(t)^2 + z'(t)^2 \end{pmatrix}.$$

Poniamo:

$$\tau = \tau(\theta, t) = \sqrt{x'(t)^2 + z'(t)^2} = \quad \text{velocità scalare di } \alpha$$

Quindi, omettendo di esplicitare la dipendenza da t, per semplicità di esposizione:

$$g = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & \tau^2 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo mostra che

$$N = \frac{f_\theta \wedge f_t}{|f_\theta \wedge f_t|} = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} z'\cos\theta \\ z'\sin\theta \\ -x' \end{pmatrix}.$$

Determiniamo la seconda forma fondamentale. Abbiamo:

$$f_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} -x\cos\theta \\ -x\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \; f_{vv} = \begin{pmatrix} x''\cos\theta \\ x''\sin\theta \\ z'' \end{pmatrix}, \; f_{\theta t} = \begin{pmatrix} -x'\sin\theta \\ x'\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

quindi

$$l_{11} = \langle f_{\theta\theta}, N\rangle = -\frac{xz'}{\tau}, \quad l_{22} = \langle f_{tt}, N\rangle = \frac{x''z' - x'z''}{\tau}, \quad l_{12} = \langle f_{\theta t}, N\rangle = 0$$

e la matrice della seconda forma fondamentale è:

$$l = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} -xz' & 0 \\ 0 & x''z' - x'z'' \end{pmatrix}.$$

Dunque la matrice dell'operatore di Weingarten è

$$w = g^{-1}l = \begin{pmatrix} -\dfrac{z'}{\tau x} & 0 \\ 0 & \dfrac{x''z' - x'z''}{\tau^3} \end{pmatrix}.$$

Poiché w è diagonale, otteniamo immediatamente che le curvature principali (non ordinate) sono

$$k_1 = -\frac{z'}{\tau x}, \quad k_2 = \frac{x''z' - x'z''}{\tau^3}.$$

- *Siccome la matrice w è diagonale rispetto alla base (f_θ, f_t), le direzioni principali sono i versori di tali vettori base:*

$$v_1 = \frac{f_\theta}{|f_\theta|}, \quad v_2 = \frac{f_t}{|f_t|}$$

Dunque, in ciascun punto p, le direzioni principali sono: quella tangente al parallelo (cioè v_1) e quella tangente al meridiano (cioè v_2) passanti per il punto. Inoltre, notiamo come la curvatura principale

$$k_2 = \frac{x''z' - x'z''}{\tau^3}$$

è proprio la curvatura della curva generatrice α (meridiano) per il punto.

Otteniamo, per la curvatura gaussiana:

$$K = k_1 k_2 = -\frac{z'(x''z' - x'z'')}{\tau^4 x}.$$

Se il parametro t di α è l'ascissa curvilinea s, allora $\tau = 1$ e la formula della curvatura gaussiana si semplifica notevolmente.

Proposizione 12. *Supponiamo che t sia l'ascissa curvilinea di α, cioè $x'(t)^2 + z'(t)^2 = 1$. Allora*

$$K(\theta, t) = -\frac{x''(t)}{x(t)}.$$

Dimostrazione. Si ha in questo caso $\tau = 1$ quindi

$$K = -\frac{x''z'^2 - x'z'z''}{x}.$$

Derivando l'identità $\tau^2 = 1$ otteniamo $x'x'' + z'z'' = 0$ dunque $z'z'' = -x'x''$ e

$$x''z'^2 - x'z'z'' = x''z'^2 + x''x'^2 = x'',$$

e si ha la tesi.

□

4.3 Toro

Per il toro di raggi $a > b$, abbiamo $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \\ z(t) \end{pmatrix}$ con

$$x(t) = a + b\cos t, \ \ z(t) = b\sin t.$$

Un calcolo mostra che

$$k_1 = -\frac{\cos t}{a + b\cos t}, \ \ k_2 = -\frac{1}{b}.$$

Dunque

$$K = \frac{\cos t}{b(a + b\cos t)}, \ \ -2H = \frac{a + 2b\cos t}{b(a + b\cos t)}.$$

4.4 Catenoide

Consideriamo la curva α del piano xz definita dal grafico

$$x = \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda z)$$

dove $\lambda > 0$ è un parametro. La superficie di rotazione cosi' ottenuta è detta *catenoide*. Parametrizziamo α:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda}\cosh(\lambda t) \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

Un calcolo mostra che le curvature principali sono:

$$k_1(t) = -\frac{\lambda}{\cosh^2(\lambda t)}, \quad k_2(t) = \frac{\lambda}{\cosh^2(\lambda t)}$$

dunque la curvatura media è identicamente nulla:

$$H \equiv 0.$$

Al variare di λ otteniamo cosi' una famiglia di superfici minimali.

- *Una superficie si dice* minimale *se ha curvatura media nulla in tutti i suoi punti.*

5 Superfici rigate

Ricordiamo che una superficie rigata è una superficie Σ tale che, per ogni suo punto p, passa una retta r interamente contenuta in Σ. Una rigata si parametrizza con $f : [a, b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ cosi' definita :

$$f(u, v) = \alpha(u) + v\xi(u) \tag{5}$$

dove $\alpha(u)$ è la direttrice e $\xi(u)$ è un campo di vettori lungo α. Le linee $u = c$ sono rette passanti per il punto $\alpha(c)$, parallele al vettore $\xi(c) \neq 0$: tali rette sono dette *generatrici* di Σ. Ricordiamo anche che un cilindro è una rigata le cui generatrici sono tutte parallele tra loro (in tal caso la funzione $\xi(u) = \xi_0$ è costante) :

$$f(u, v) = \alpha(u) + v\xi_0,$$

mentre un cono è una rigata le cui generatrici passano tutte per uno stesso punto, cioè $\alpha(u) = \alpha_0$ è costante :

$$f(u, v) = \alpha_0 + v\xi(u).$$

Esempio. *Studiare la curvatura del cilindro di direttrice* $\alpha(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ 2\sin u \\ 0 \end{pmatrix}$ *e generatrici parallele a* $\xi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Σ è il cilindro che proietta l'ellisse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ del piano xy parallelamente al vettore ξ_0. Il cilindro Σ si parametrizza

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ 2\sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ 2\sin u + v \\ v \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$f_u = \begin{pmatrix} -\sin u \\ 2\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$f_u \wedge f_v = \begin{pmatrix} 2\cos u \\ \sin u \\ -\sin u \end{pmatrix}, \quad |f_u \wedge f_v|^2 = 2 + 2\cos^2 u > 0.$$

Σ è regolare ovunque e il suo versore normale è

$$N = \frac{1}{\sqrt{2+2\cos^2 u}} \begin{pmatrix} 2\cos u \\ \sin u \\ -\sin u \end{pmatrix}.$$

La prima forma fondamentale è

$$g = \begin{pmatrix} \sin^2 u + 4\cos^2 u & 2\cos u \\ 2\cos u & 2 \end{pmatrix},$$

quindi $\det g = 2 + 2\cos^2 u$ e l'inversa è:

$$g^{-1} = \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} 2 & -2\cos u \\ -2\cos u & \sin^2 u + 4\cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Veniamo alla seconda forma fondamentale. Abbiamo:

$$f_{uu} = \begin{pmatrix} -\cos u \\ -2\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_{uv} = f_{vv} = 0.$$

Quindi

$$l_{11} = \langle f_{uu}, N \rangle = -\frac{2}{\sqrt{2+2\cos^2 u}}, \quad l_{12} = l_{22} = 0.$$

e otteniamo:

$$l = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2+2\cos^2 u}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui $\det l = 0$ e quindi $K = 0$ ovunque. Un calcolo mostra che la matrice dell'operatore di Weingarten è

$$w = g^{-1} l = \frac{4}{(\det g)^{3/2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \cos u & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori

$$k_1 = 0, \ k_2 = -\frac{4}{(\det g)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{2}}{(1+\cos^2 u)^{3/2}}.$$

La cosa importante da notare è che f_v è sempre direzione principale, con sezione normale la generatrice per il punto. Infatti, questo si poteva anche dedurre dal fatto che

$$W(f_v) = -\nabla_{f_v} N = -\frac{\partial N}{\partial v} = 0.$$

Infine, osserviamo che la superficie in questione ha equazione cartesiana:

$$x^2 + \frac{(y-z)^2}{4} = 1,$$

quindi Σ è una quadrica.

Esempio. *Parametrizzare il cono che proietta la parabola $y = x^2$ del piano xy dal punto $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Verificare che la curvatura gaussiana è ovunque nulla e calcolare le curvature principali nell'origine (che è un punto di Σ). Infine, determinare l'equazione cartesiana del cono eliminando i parametri u, v.*

Sia $\beta(u) = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ una parametrizzazione della parabola. La generatrice che unisce α_0 con $\beta(u)$ ha vettore direttore $\xi(u) = \beta(u) - p_0 = \begin{pmatrix} u \\ u^2 - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dunque Σ ha parametrizzazione

$$f(u, v) = \alpha_0 + v\xi(u) = \begin{pmatrix} uv \\ 1 + v(u^2 - 1) \\ 1 - v \end{pmatrix}$$

Otteniamo

$$f_u = \begin{pmatrix} v \\ 2uv \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} u \\ u^2 - 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_u \wedge f_v = -v \begin{pmatrix} 2u \\ -1 \\ 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

e si vede che f è regolare se e solo se $v \neq 0$. Si verifica poi che $l_{12} = 0$ dunque $\det l = 0$ e la curvatura gaussiana si annulla ovunque. Infine, l'origine corrisponde a $u = 0, v = 1$, dove si ha

$$f_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_u \wedge f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

quindi

$$N = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo mostra che la matrice $w = g^{-1}l$ nel dato punto è

$$w = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi le curvature principali nell'origine sono $\sqrt{2}, 0$.
Infine, dalla parametrizzazione

$$\begin{cases} x = uv \\ y = 1 + v(u^2 - 1) \\ z = 1 - v \end{cases}$$

si ottiene $v = 1-z$; sostituendo nelle prime due equazioni, dopo qualche calcolo, otteniamo l'equazione cartesiana del cono:

$$x^2 - z^2 + yz - y + z = 0.$$

5.1 Rigate sviluppabili

Innanzitutto osserviamo le seguenti identità sulla seconda forma fondamentale di una superficie rigata di direttrice $\alpha(u)$ e parametrizzazione $f(u,v) = \alpha(u) + v\xi(u)$:

$$\begin{aligned} &f_u = \alpha'(u) + v\xi'(u), \quad f_v = \xi(u) \\ &f_{uu} = \alpha''(u) + v\xi''(u), \quad f_{uv} = \xi'(u), \quad f_{vv} = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Si ha $l_{22} = \langle f_{vv}, N\rangle = 0$, dunque:

$$\det l = -l_{12}^2 \leq 0.$$

Proposizione 13. *La curvatura gaussiana di una superficie rigata Σ è ovunque non positiva: $K \leq 0$.*

Dimostrazione. Basta osservare che

$$K = \frac{\det l}{\det g} = -\frac{l_{12}^2}{\det g} \leq 0,$$

poichè $\det g > 0$ ovunque. □

• La superficie rigata (regolare) Σ si dice *sviluppabile* se la sua curvatura gaussiana è identicamente nulla.

Teorema 14. *Sia $f(u,v) = \alpha(u) + v\xi(u)$ una parametrizzazione regolare di una rigata Σ. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

a) *Σ è sviluppabile.*

b) *Il versore normale N è costante su ciascuna generatrice.*

c) *I vettori* $\xi(u), \xi'(u), \alpha'(u)$ *sono ovunque linearmente dipendenti (complanari); in altre parole*

$$\det(\xi(u), \xi'(u), \alpha'(u)) = 0$$

per ogni u.

Dimostrazione. Dal teorema precedente vediamo che Σ è sviluppabile se e solo se $l_{12} = 0$, dove

$$l_{12} = \langle f_{uv}, N\rangle = -\langle f_u, \frac{\partial N}{\partial v}\rangle$$

dove la seconda identità segue derivando l'identità $\langle f_u, N\rangle = 0$ rispetto a v.

a) Supponiamo che $l_{12} = 0$. Allora $\langle f_u, \frac{\partial N}{\partial v}\rangle = 0$; d'altra parte, poiché $f_{vv} = 0$, si ha anche $\langle f_v, \frac{\partial N}{\partial v}\rangle = 0$. Poichè $\frac{\partial N}{\partial v}$ è un vettore tangente a Σ, e (f_u, f_v) è una base di $T_p\Sigma$, otteniamo $\frac{\partial N}{\partial v} = 0$ cioè

$$\nabla_{f_v} N = 0.$$

Poichè f_v è tangente alla generatrice passante per p, N è costante su ciascuna generatrice. Viceversa, se $\nabla_{f_v} N = 0$ si ha immediatamente $W(f_v) = 0$ dunque 0 è una curvatura principale e conseguentemente $K = 0$.

b) Dalle identità in (6) vediamo che

$$f_u \wedge f_v = \alpha' \wedge \xi + v\xi' \wedge \xi.$$

Indicato con

$$\lambda = \frac{1}{|f_u \wedge f_v|} = \frac{1}{\sqrt{\det g}}$$

l'inverso del modulo di $f_u \wedge f_v$ (si osservi che $\lambda > 0$ poichè f è regolare), abbiamo che $N = \lambda f_u \wedge f_v$ dunque

$$N = \lambda(\alpha' \wedge \xi + v\xi' \wedge \xi).$$

Tenuto conto del fatto che $f_{uv} = \xi'$, e che $\langle \xi', \xi' \wedge \xi\rangle = 0$, arriviamo a

$$l_{12} = \langle f_{uv}, N\rangle = \lambda\langle \xi', \alpha' \wedge \xi\rangle = \lambda \det(\xi', \alpha', \xi),$$

che, con due scambi di colonne diventa

$$l_{12} = \lambda \det(\xi, \xi', \alpha') = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \det(\xi, \xi', \alpha').$$

L'asserzione b) segue immediatamente. □

Dalla dimostrazione del teorema precedente, e dal fatto che $K = -\dfrac{l_{12}^2}{\det g}$, otteniamo la seguente espressione della curvatura gaussiana di una rigata:

$$K = -\frac{\det(\xi, \xi', \alpha')^2}{(\det g)^2}$$

Per un cono si ha $\alpha' = 0$, mentre per un cilindro $\xi' = 0$.

Corollario 15. *La curvatura gaussiana di un cono, o di un cilindro, è identicamente nulla. Dunque coni e cilindri sono rigate sviluppabili.*

6 Superfici convesse

Sia π un piano dello spazio. È chiaro che π possiede due versori normali (uno opposto dell'altro). Scegliere uno dei due versori normali equivale a scegliere un'*orientazione* di π.

Sia Σ una superficie regolare e sia $\pi(p)$ il suo piano tangente affine in p. Allora possiamo orientare $\pi(p)$ mediante il versore normale $N(p)$ della sua parametrizzazione.

Se π è un piano orientato dal versore normale N, denotiamo con π_+ (risp. $\pi-$) il semispazio chiuso delimitato da π e contenente N (risp. contenente $-N$).

Definizione 16. *Diremo che la superficie Σ è* convessa *se, per ogni $p \in \Sigma$, la superficie è interamente contenuta in uno dei due semispazi chiusi definiti da $\pi(p)$, il piano tangente affine in p. In altre parole, se per ogni $p \in \Sigma$ si ha:*

$$\Sigma \subseteq \pi_+(p), \quad \textit{oppure} \quad \Sigma \subseteq \pi_-(p).$$

Diremo che Σ è strettamente convessa *se è convessa e interseca il piano tangente affine solo nel punto di tangenza:*

$$\Sigma \cap \pi(p) = \{p\}.$$

Ad esempio,

- una sfera (o un ellissoide) è una superficie strettamente convessa.
- Il cilindro è una superficie convessa, ma non strettamente : l'intersezione con il piano tangente risulta essere una retta (la generatrice passante per il punto di tangenza).
- Un paraboloide iperbolico non è una superficie convessa.

Esiste anche una nozione locale di convessità. Ricordiamo che $B_r(p)$ indica la palla aperta di centro p e raggio r, ovvero :

$$B_r(p) = \{q \in \mathbf{R}^3 : d(p, q) < r\}.$$

Definizione 17. *Σ si dice* localmente convessa in *p se, vicino a p, essa è convessa, ovvero se esiste $\epsilon > 0$ tale che la porzione di superficie $B_\epsilon(p) \cap \Sigma$ è convessa.*
Se in più $B_\epsilon(p) \cap \Sigma \cap \pi(p) = \{p\}$ allora Σ si dice strettamente localmente convessa in *p.*

Vogliamo ora mettere in relazione la convessita' locale in p con il segno della curvatura gaussiana $K(p)$.

6.1 Distanza da un piano orientato

Sia π il piano passante per p e ortogonale al versore N. Se x è un punto dello spazio, il vettore $\langle x - p, N\rangle N$ è la proiezione ortogonale del vettore $x - p$ su N. Dunque si ha:

Lemma 18. *La funzione $\psi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definita da:*

$$\psi(x) = \langle x - p, N\rangle$$

esprime la distanza (con segno) del punto x dal piano π passante per p e ortogonale a N. Il segno di ψ è positivo nel semispazio aperto contenente N.

Ricordiamo che una funzione di più variabili $\psi(x)$ ha un *massimo locale* (risp. *minimo locale*) nel punto x_0 se

$$\psi(x) \geq \psi(x_0) \quad (\text{risp. } \psi(x) \leq \psi(x_0))$$

per ogni x in un intorno sufficientemente piccolo di x_0. Il massimo o minimo si dice *stretto* se la rispettiva disuguaglianza è stretta per ogni $x \neq x_0$.

La seguente proposizione è conseguenza immediata delle definizioni.

Proposizione 19. *Sia p un punto fissato della superficie Σ, e si consideri la funzione $\psi : \Sigma \to \mathbf{R}$:*

$$\psi(x) = \langle x - p, N\rangle$$

che esprime la distanza di $x \in \Sigma$ dal piano affine tangente in p. Allora Σ è localmente convessa in p se e solo se p è un massimo locale, o un minimo locale, di ψ.
Σ è strettamente localmente convessa in p se tale massimo locale, o minimo locale, si verifica in senso stretto.

6.2 Curvatura gaussiana e convessità

Il risultato che segue mette in relazione la convessita' locale con la positivita' della curvatura gaussiana.

Teorema 20. *Sia Σ una superficie regolare, e p un suo punto.*
a) *Se $K(p) > 0$ allora Σ è strettamente localmente convessa in p.*
b) *Se $K(p) < 0$ allora, in ogni intorno di p, Σ interseca entrambi i semispazi aperti delimitati dal piano tangente affine $\pi(p)$.*

Dimostrazione. Fissiamo il punto p e il piano tangente affine $\pi(p)$ e consideriamo la funzione $\psi : \Sigma \to \mathbf{R}$ che misura la distanza dal piano tangente affine in p, come nella proposizione precedente. Data una parametrizzazione $f : \Omega \to \Sigma$, si supponga che $p = f(u_0, v_0)$. Mediante una traslazione degli assi u, v in Ω supporremo che $(u_0, v_0) = (0, 0)$. Siamo cosi' ricondotti a studiare la funzione $\psi : \Omega \to \mathbf{R}$ definita in un intorno dell'origine da

$$\psi(u, v) = \langle f(u, v) - f(0, 0), N\rangle,$$

dove N è il versore normale in p. Mediante una traslazione degli assi in $\mathbf{R}^3$ possiamo sempre supporre che $p = (0,0,0)$, dunque $f(0,0) = (0,0,0)$. Senza ledere la generalità, la funzione ψ si puo' dunque scrivere:

$$\psi(u,v) = \langle f(u,v), N\rangle.$$

Lo sviluppo di Taylor intorno a $(0,0)$ di ψ è dato da:

$$\psi(u,v) = \psi(0,0)+\psi_u(0,0)u+\psi_v(0,0)v+\frac{1}{2}\Big(\psi_{uu}(0,0)u^2+2\psi_{uv}(0,0)uv+\psi_{vv}(0,0)v^2\Big)+o(r^2),$$

Ora $\psi(0,0) = 0$. Si ha, poiché N è un vettore costante: $\psi_u = \langle f_u, N\rangle$ dunque:

$$\psi_u(0,0) = \langle f_u(0,0), N\rangle = 0$$

in quanto $f_u(0,0)$ è tangente a Σ in p. Analogamente $\psi_v(0,0) = 0$, e l'origine è un punto critico. Derivando ulteriormente otteniamo $\psi_{uu} = \langle f_{uu}, N\rangle$ che, calcolato nell'origine, dà:

$$\psi_{uu}(0,0) = \langle f_{uu}(0,0), N\rangle = l_{11};$$

in modo simile otteniamo $\psi_{uv}(0,0) = l_{12}, \psi_{vv}(0,0) = l_{22}$, dove (l_{ij}) denota la matrice della seconda forma fondamentale in p. Arriviamo all'espressione

$$\psi(u,v) = \frac{1}{2}\Big(l_{11}u^2 + 2l_{12}uv + l_{22}v^2\Big) + o(r^2). \tag{7}$$

Ora, mediante una rotazione degli assi $(u,v) \to (u',v')$, possiamo diagonalizzare la forma quadratica nella parentesi dell'espressione (7); se λ_1 e λ_2 sono gli autovalori della matrice l_{ij}, possiamo scrivere, nelle nuove coordinate:

$$\psi(u',v') = \frac{1}{2}\Big(\lambda_1 u'^2 + \lambda_2 v'^2\Big) + o(r^2). \tag{8}$$

Supponiamo che $K(p) > 0$; sapendo che $K = \det l/\det g$ e che $\det g > 0$ si ha anche $\det l > 0$ dunque

$$\lambda_1\lambda_2 > 0$$

e i due autovalori hanno lo stesso segno. Se sono entrambi positivi, si vede che l'origine è un minimo locale stretto, poiche' $\psi(u',v') > 0 = \psi(0,0)$ per ogni $(u',v') \neq (0,0)$ sufficientemente vicino all'origine; se λ_1 e λ_2 sono entrambi negativi si ha che l'origine è un massimo locale stretto. Dunque Σ è strettamente localmente convessa in p, il che dimostra a).

Se $K(p) < 0$ gli autovalori λ_1 e λ_2 hanno segno opposto, e si vede subito che l'espressione in parentesi cambia di segno in ogni intorno dell'origine. $\square$

6.3 Punti ellittici, iperbolici, parabolici

Data una superficie Σ, sia $K(p)$, come al solito, la curvatura gaussiana di Σ in p. Il punto $p \in \Sigma$ si dice:

- *ellittico*, se $K(p) > 0$,
- *iperbolico*, se $K(p) < 0$,
- *parabolico*, se $K(p) = 0$.

Infine un punto parabolico si dice *planare* se le curvature principali in p sono entrambe nulle : $k_1(p) = k_2(p) = 0$.
Per quanto detto in precedenza, vicino a un punto ellittico la superficie è tutta da una parte rispetto al piano tangente affine.
Esercizio. Dimostrare che i punti di una sfera (o di un ellissoide) sono tutti ellittici, mentre i punti di un paraboloide iperbolico sono tutti iperbolici. Stabilire la natura dei punti delle altre quadriche generali.

7 Grafici di funzioni

Sia

$$F : \Omega \to \mathbf{R}^2$$

una funzione differenziabile, e consideriamo il suo grafico:

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : (x, y) \in \Omega, z = F(x, y)\}.$$

Possiamo parametrizzare Σ nel modo usuale, ottenendo $f : \Omega \to \mathbf{R}^3$:

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ F(u, v) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Già sappiamo che f è regolare su Ω. Inoltre, è evidentemente iniettiva. Abbiamo

$$f_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ F_u \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ F_v \end{pmatrix}.$$

Dunque la prima F.F. è

$$g = \begin{pmatrix} 1 + F_u^2 & F_u F_v \\ F_u F_v & 1 + F_v^2 \end{pmatrix},$$

e si ha:

$$\det g = 1 + |\nabla F|^2.$$

Inoltre un calcolo mostra che

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}} \begin{pmatrix} -F_u \\ -F_v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ora si ha

$$f_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{uu} \end{pmatrix}, \quad f_{uv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{uv} \end{pmatrix}, \quad f_{vv} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{vv} \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$l_{11} = \frac{F_{uu}}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}}, \quad l_{12} = \frac{F_{uv}}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}}, \quad l_{22} = \frac{F_{vv}}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}}.$$

e si ha:

$$l = \frac{1}{\sqrt{1+|\nabla F|^2}} \begin{pmatrix} F_{uu} & F_{uv} \\ F_{uv} & F_{vv} \end{pmatrix}.$$

Notiamo che la matrice delle derivate seconde

$$\nabla^2 F \doteq \begin{pmatrix} F_{uu} & F_{uv} \\ F_{uv} & F_{vv} \end{pmatrix}$$

è detta anche *matrice hessiana* della funzione F, dunque

$$l = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \nabla^2 F \quad \text{e} \quad \det l = \frac{\det \nabla^2 F}{\det g}.$$

Concludiamo che

$$K = \frac{\det l}{\det g} = \frac{F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2}{(1+|\nabla F|^2)^2}.$$

Proposizione 21. *Sia $F(x,y)$ una funzione differenziabile su un dominio Ω del piano. Allora il grafico di $F(x,y)$ su Ω, parametrizzato come in (5), è una superficie regolare. con prima f.f.*

$$g = \begin{pmatrix} 1+F_u^2 & F_uF_v \\ F_uF_v & 1+F_v^2 \end{pmatrix},$$

seconda forma fondamentale

$$l = \det l = \frac{\det \nabla^2 F}{\det g}$$

e curvatura gaussiana

$$K = \frac{\det l}{\det g} = \frac{\det \nabla^2 F}{(\det g)^2} = \frac{F_{uu}F_{vv} - F_{uv}^2}{(1+|\nabla F|^2)^2}.$$

Vediamo ora cosa accade in un punto critico (x_0, y_0), dove $\nabla F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Corollario 22. *Se (x_0, y_0) è un punto critico di F allora, nel corrispondente punto $p_0 = (x_0, y_0, F(x_0, y_0))$ del grafico si ha*

$$g(p_0) = I, \quad l(p_0) = \nabla^2 F(x_0, y_0).$$

La matrice di Weingarten è

$$w(p_0) = \nabla^2 F(x_0, y_0)$$

(in altre parole, la matrice hessiana) e le curvature principali in p_0 sono gli autovalori di tale matrice. Infine, sempre nel punto p_0:

$$K = \det \nabla^2 F, \quad H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\nabla^2 F.$$

7.1 Esempio

Paraboloide ellittico: grafico della funzione

$$F(x, y) = x^2 + 3y^2$$

e l'origine è un punto critico. Si ha

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Curvature principali (nell'origine) $k_1 = 2, k_2 = 6$ e quindi curvatura gaussiana $K = 12$. L'origine è un punto ellittico.

7.2 Esempio.

Paraboloide iperbolico : grafico della funzione

$$F(x, y) = 2x^2 - 5y^2.$$

L'origine è un punto critico. Si ha

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -20 \end{pmatrix}$$

Curvature principali (nell'origine) $k_1 = 4, k_2 = -20$ e quindi curvatura gaussiana $K = -80 < 0$. L'origine è un punto iperbolico.

7.3 Esempio

Si consideri il grafico

$$z = xy.$$

Si ha $F_x = y, F_y = x$ dunque

$$g = \begin{pmatrix} 1+y^2 & xy \\ xy & 1+x^2 \end{pmatrix}, \quad \det g = 1 + x^2 + y^2.$$

Si ha poi

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$l = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e si ha:

$$K = -\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

La curvatura gaussiana è sempre negativa, e ha valore assoluto massimo nell'origine, dove $K = -1$. La superficie è un paraboloide iperbolico e ha forma canonica $z = x^2 - y^2$ (questo si verifica con un procedimento di riduzione gia' visto nella Parte 3).

7.4 Esempio.

Consideriamo il grafico

$$z = \cos 2x - \cos y.$$

Si ha $F_x = -2\sin 2x, F_y = \sin y$ e si vede che l'origine è un punto critico. Si ha

$$F_{xx} = -4\cos 2x, \quad F_{xy} = 0, \quad F_{yy} = \cos y.$$

Dunque la matrice hessiana nel punto critico è

$$\nabla^2 F(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e l'origine è un punto iperbolico. In un intorno dell'origine

$$z = -4x^2 + y^2 + o(r^2).$$

Vediamo la curvatura gaussiana in un punto qualunque. Si ha:

$$\nabla^2 F = \begin{pmatrix} -4\cos 2x & 0 \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}$$

$$K = \frac{\det \nabla^2 F}{(\det g)^2} = -\frac{4\cos 2x \cos y}{(1 + 4\sin^2 2x + \sin^2 y)^2}$$

da cui si vede che la curvatura Gaussiana camba segno su Σ, che ha punti sia ellittici che iperbolici (e quindi anche punti in cui la curva gaussiana è nulla).

8 Superfici minimali

Ricordiamo che una superficie Σ si dice *minimale* se ha curvatura media identicamente nulla. Le superfici minimali sono legate a un'importante proprieta' variazionale riguardo all'area. Supponiamo che γ sia una curva dello spazio semplice (senza autointersezioni) e chiusa e consideriamo l'insieme S_γ delle superfici Σ che hanno come bordo γ. Supponiamo poi che esista una superficie (regolare) Σ_0 che abbia *area minima* tra tutte le superfici della famiglia S_γ. Vogliamo verificare che allora Σ_0 è minimale. In altre parole,

Teorema 23. *Nella notazione precedente, supponiamo che Σ_0 sia una superficie parametrizzata regolare di S_γ, tale che:*

$$\text{Area}(\Sigma_0) \leq \text{Area}(\Sigma)$$

per ogni $\Sigma \in S_\gamma$. Allora Σ_0 è minimale.

Dimostriamo il teorema nel caso in cui Σ_0 sia parametrizzata da un'applicazione

$$f : \Omega \to \mathbf{R}^3.$$

La dimostrazione si fa considerando variazioni a un parametro di Σ_0; precisamente, dato un campo di vettori ξ (s'intende, differenziabile) e normale a Σ, e dato $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, con $\epsilon > 0$ sufficientemente piccolo, consideriamo la funzione $f_t : \Omega \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$f_t(u, v) = f(u, v) + t\xi(u, v).$$

Se ϵ è sufficientemente piccolo si puo' verificare che f_t è una parametrizzazione regolare di una superficie $f_t(\Omega) \doteq \Sigma_t^{[\xi]}$, detta *variazione di* Σ_0 *associata a* ξ. Otteniamo cosi' una famiglia a un parametro di superfici "vicine" a Σ_0:

$$\{\Sigma_t^{[\xi]} : t \in [-\epsilon, \epsilon]\}.$$

Notiamo che per $t = 0$ otteniamo proprio Σ_0:

$$\Sigma_0^{[\xi]} = \Sigma_0.$$

Se assumiamo che ξ sia nullo sul bordo γ di Σ_0, vediamo che tutte queste superfici appartengono a S_γ, dunque, per la proprietà di minimo di Σ_0, si ha:

$$\text{Area}(\Sigma_0^{[\xi]}) \leq \text{Area}(\Sigma_t^{[\xi]}) \quad \text{per ogni } t \in [-\epsilon, \epsilon].$$

Ora, fissato il campo di vettori ξ, consideriamo la funzione $\psi : [-\epsilon, \epsilon] \to \mathbf{R}$:

$$\psi(t) = \text{Area}(\Sigma_t^{[\xi]}).$$

Si verifica che ψ è differenziabile; poiché $t = 0$ è un punto di minimo di ψ, si ha necessariamente $\psi'(0) = 0$. Dunque concludiamo che

Lemma 24. *Se Σ_0 ha area minima tra tutte le superfici di S_γ allora, per ogni campo di vettori ξ normali a Σ_0 e nulli su γ, si ha:*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Area}(\Sigma_t^{[\xi]}) = 0.$$

Ora osserviamo che un vettore normale a Σ_0 nel punto $x_0 \in \Sigma_0$ è un multiplo del versore normale $N(x_0)$ alla superficie in x_0. Dunque un campo di vettori normali a Σ_0 si scrive:

$$\xi(x) = \phi(x)N(x)$$

dove $\phi(x)$ è una funzione su Σ_0. Il prossimo lemma sarà dimostrato nella sezione che segue.

Lemma 25. *Sia $\xi = \phi N$. Allora*

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{Area}(\Sigma_t^{[\xi]}) = -2\int_{\Sigma_0} \phi H \, d\Sigma_0$$

dove H è la curvatura media di Σ_0.

• Notiamo che se $H = 0$ ovunque, allora la derivata a primo membro della relazione è nulla per ogni variazione a un parametro di Σ_0. Questo si esprime dicendo che una superficie minimale è un *punto critico del funzionale area.*

Dimostriamo ora il teorema. Se Σ_0 minimizza l'area in S_γ allora, per il lemma 24 e il lemma 25 si ha:

$$\int_{\Sigma_0} \phi H \, d\Sigma_0 = 0$$

per ogni funzione differenziabile ϕ su Σ_0, nulla al bordo. Ma si dimostra facilmente che questo succede solo se $H = 0$ in tutti i punti di Σ_0. Quindi Σ_0 è minimale.

8.1 Dimostrazione del lemma 25

Ricordiamo che

$$\Sigma_t^{[\xi]} = f_t(\Omega),$$

dove f_t è la parametrizzazione $f_t : \Omega \to \mathbf{R}^3$ definita da

$$f_t(u, v) = f(u, v) + t\phi(u, v)N(u, v)$$

e che scriveremo semplicemente:

$$f_t = f + t\phi N.$$

Se $g(t)$ è la prima forma fondamentale di f_t (notare che $g(t)$ è una matrice dipendente da u, v) allora:

$$\psi(t) \doteq \mathrm{Area}(\Sigma_t^{[\xi]}) = \int_\Omega \sqrt{\det g(t)} \, dudv.$$

Dobbiamo quindi calcolare $\psi'(0)$. Poichè l'integrale a destra esiste finito per ogni t, si ha:

$$\begin{aligned}\psi'(t) &= \frac{d}{dt}\int_\Omega \sqrt{\det g(t)}\,dudv \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\sqrt{\det g(t)}\,dudv \\ &= \int_\Omega \frac{1}{2\sqrt{\det g(t)}}\frac{d}{dt}\det g(t)\,dudv\end{aligned}$$

dunque:

$$\psi'(0) = \int_\Omega \frac{1}{2\sqrt{\det g}}\Big(\frac{d}{dt}|_{t=0}\det g(t)\Big)\,dudv,$$

dove g è la prima forma fondamentale di Σ_0. Rimane dunque da calcolare $\dfrac{d}{dt}|_{t=0}\det g(t)$. Ora:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_t}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial u} + t\dfrac{\partial \phi}{\partial u}N + t\phi\dfrac{\partial N}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f_t}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial v} + t\dfrac{\partial \phi}{\partial v}N + t\phi\dfrac{\partial N}{\partial v}\end{cases}$$

Indichiamo con $g_{ij}(t)$ gli elementi della matrice $g(t)$. Si ha:

$$\begin{aligned}g_{11}(t) &= \langle\frac{\partial f_t}{\partial u}, \frac{\partial f_t}{\partial u}\rangle \\ &= \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\rangle + 2t\frac{\partial \phi}{\partial u}\langle\frac{\partial f}{\partial u}, N\rangle + 2t\phi\langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u}\rangle + t^2 A_{11}\end{aligned}$$

dove

$$A_{11} = \Big(\frac{\partial \phi}{\partial u}\Big)^2 + \phi^2|\frac{\partial N}{\partial u}|^2 + 2\phi\frac{\partial \phi}{\partial u}\langle N, \frac{\partial N}{\partial u}\rangle.$$

Ora

$$\langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\rangle = g_{11}, \quad \langle\frac{\partial f}{\partial u}, N\rangle = 0, \quad \langle\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial u}\rangle = -\langle\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, N\rangle = -l_{11}.$$

Dunque:

$$g_{11}(t) = g_{11} - 2t\,\phi\,l_{11} + t^2 A_{11} = g_{11} - 2t\,\phi\,l_{11} + O(t^2),$$

dove $O(t^2)$ è una funzione del tipo: $O(t^2) = t^2 h(t)$, con $h(t)$ funzione differenziabile; dunque tale funzione, insieme con la sua derivata prima, si annulla per $t = 0$. Analogamente si dimostra che:

$$\begin{aligned}g_{12}(t) &= g_{12} - 2t\,\phi\,l_{12} + O(t^2), \\ g_{22}(t) &= g_{22} - 2t\,\phi\,l_{22} + O(t^2).\end{aligned}$$

Ora

$$\det g(t) = g_{11}(t)g_{22}(t) - g_{12}(t)^2.$$

Dovendo calcolarne la derivata prima, siamo interessati soltanto al coefficiente di t nell'espressione di $\det g(t)$. Ora si ha:

$$\det g(t) = \det g - 2t\phi\Big(g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12}\Big) + O(t^2)$$

Dunque:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \det g(t) = -2\phi\Big(g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12}\Big).$$

Ricordiamo che

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{l_{11}g_{22} + l_{22}g_{11} - 2l_{12}g_{12}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$$

da cui si ricava

$$g_{11}l_{22} + g_{22}l_{11} - 2g_{12}l_{12} = 2H \det g.$$

In conclusione:

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} \det g(t) = -4\phi H \det g.$$

Sostituendo nella precedente espressione di $\psi'(0)$ vediamo che:

$$\begin{aligned}\psi'(0) &= -2\int_{\Omega} \phi H \sqrt{\det g}\, dudv \\ &= -2\int_{\Sigma_0} \phi H \, d\Sigma_0\end{aligned}$$

e la dimostrazione è completa.

8.2 Catenoide

La catenoide è la superficie generata dalla rotazione della curva $x = \cosh z$ del piano xz intorno all'asse z. Si parametrizza cosi':

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in [0, 2\pi) \times \mathbf{R}.$$

dove u è il parametro angolare che definisce la rotazione. I paralleli sono dunque le linee coordinate $v = c$ mentre i meridiani sono le linee coordinate $u = c$. La prima forma fondamentale è:

$$g = \begin{pmatrix} \cosh^2 v & 0 \\ 0 & \cosh^2 v \end{pmatrix}$$

e il versore normale:

$$N(u,v) = \frac{1}{\cosh v} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ -\sinh v \end{pmatrix}.$$

Seconda forma fondamentale e matrice di Weingarten:

$$l = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w = g^{-1}l = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cosh^2 v} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2 v} \end{pmatrix}.$$

Le curvature principali sono

$$k_1 = -\frac{1}{\cosh^2 v}, \quad k_2 = \frac{1}{\cosh^2 v},$$

e si ha

$$H(u,v) = 0$$

per ogni u, v. La catenoide è dunque una superficie minimale.
Si noti che la curvatura gaussiana è

$$K(u,v) = -\frac{1}{\cosh^4 v},$$

ed è sempre negativa.

8.3 Elicoide

Un elicoide minimale è la superficie rigata generata dal movimento rototraslatorio di una retta intorno all'asse z. Consideriamo la rigata con direttrice $\alpha(u)$ e generatrice $\xi(u)$ date, rispettivamente, da

$$\alpha(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \quad \xi(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti che la retta $r_u(v) = v\xi(u)$ è ortogonale all'asse z, e ruota intorno ad esso con velocita' uniforme u. La parametrizzazione è data da:

$$f(u,v) = \alpha(u) + v\xi(u) = \begin{pmatrix} v\cos u \\ v\sin u \\ u \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Si ha:

$$f_u = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prima forma fondamentale ed elemento d'area:

$$g = \begin{pmatrix} 1+v^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\det g} = \sqrt{1+v^2}.$$

Versore normale

$$N(u,v) = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ -v \end{pmatrix}.$$

Si ha poi:

$$f_{uu} = \begin{pmatrix} -v\cos u \\ -v\sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_{uv} = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_{vv} = 0.$$

Dunque:

$$l_{11} = 0, \quad l_{12} = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}, \quad l_{22} = 0$$

e la seconda forma fondamentale e la matrice di Weingarten sono, rispettivamente:

$$l = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{(1+v^2)^{3/2}} \\ \frac{1}{(1+v^2)^{1/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Concludiamo che

$$K(u,v) = \det w = -\frac{1}{(1+v^2)^2}, \quad H(u,v) = \operatorname{tr} w = 0.$$

In effetti, le curvature principali sono date da:

$$k_1 = -\frac{1}{1+v^2}, \quad k_2 = \frac{1}{1+v^2}.$$

9 Esercizi

9.1 Esercizio

Data una curva regolare $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}^3$, la superficie rigata

$$f(u,v) = \alpha(u) + v\alpha'(u)$$

si dice *rigata delle tangenti* di α.

a) Determinare la curvatura gaussiana della rigata delle tangenti se la curva α è:

$$\alpha(u) = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}.$$

b) È vero che la rigata delle tangenti di α è sempre sviluppabile, per ogni curva α ?

9.2 Esercizio

Si consideri la superficie rigata $f(u,v) = \alpha(u) + v\xi(u)$ su $\Omega = [0, 2\pi] \times \mathbf{R}$ se

$$\alpha(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare la curvatura gaussiana K in ciascun punto, e stabilire la natura dei suoi punti (ellittici, iperbolici o parabolici).

b) Determinare i punti dove il valore assoluto di K assume valore massimo; in tali punti, calcolare le curvature principali.

c) Verificare che il punto $p = (1, 0, 0)$ appartiene a Σ; stabilire se in p esistono sezioni normali a curvatura nulla.

d) Verificare che f parametrizza una quadrica, determinando un'equazione cartesiana di Σ. Riconoscere il tipo di quadrica.

9.3 Esercizio

Si consideri l'ellissoide ottenuto ruotando intorno all'asse z la curva (ellisse) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ contenuta nel piano xz. Si assuma $a \geq b$.

a) Parametrizzare Σ, e trovare la sua equazione cartesiana.

b) Calcolare curvatura gaussiana e curvatura media di Σ.

c) Determinare i valori massimi e minimi della curvatura gaussiana, e i punti dove tali estremi sono raggiunti.

d) Calcolare le curvature principali nel punto $(a, 0, 0)$.

e) Calcolare la curvatura, nel punto $(a, 0, 0)$, della sezione normale ottenuta intersecando Σ con il piano $x + z - a = 0$.

9.4 Esercizio

a) Parametrizzare il paraboloide ellittico, di equazione $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

b) Calcolare la curvatura gaussiana e stabilire la natura dei punti di Σ.

c) Trovare i punti dove la curvatura gaussiana assume valore massimo; in tali punti, scrivere esplicitamente la matrice di Weingarten e determinare le curvature principali.

d) Calcolare la curvatura, nel punto $(0, 0, 0)$ della sezione normale ottenuta intersecando Σ con il piano $x + y = 0$.

9.5 Esercizio

a) Parametrizzare il paraboloide iperbolico, di equazione $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

b) Calcolare la curvatura gaussiana e stabilire la natura dei punti di Σ.

c) Trovare i punti dove la curvatura gaussiana assume, in modulo, valore massimo; in tali punti, scrivere esplicitamente la matrice di Weingarten e determinare le curvature principali.

d) Stabilire se nel punto $(0, 0, 0) \in \Sigma$ ci sono sezioni normali a curvatura nulla.

9.6 Esercizio

Si consideri il cono Σ ottenuto proiettando dal punto $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ l'ellisse $4x^2 + z^2 = 4$ del piano xz.

a) Parametrizzare Σ e trovare la sua equazione cartesiana.

b) Determinare le curvature principali di Σ nei suoi punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$.

9.7 Esercizio

Si consideri il toro di raggi $a > b > 0$.

a) Dopo aver parametrizzato Σ, si calcoli la sua curvatura gaussiana, e si determini la natura dei suoi punti.

b) Calcolare l'area della parte ellittica di Σ (intesa come insieme dei punti ellittici di Σ).

c) Calcolare l'integrale su Σ della curvatura gaussiana, e verificare che non dipende da a e b.

9.8 Esercizio

a) Parametrizzare la superficie Σ di equazione $x^3 - 2y^3 - z = 0$. Calcolare la sua curvatura gaussiana e determinare i punti ellittici (risp. parabolici, iperbolici).

b) Sia $p = (0, 0, 0) \in \Sigma$. Determinare le curvature principali nel punto $p = (0, 0, 0)$.

c) Determinare il piano affine tangente in p. È vero che Σ è localmente convessa in p ?

9.9 Esercizio

a) Dato $R > 0$, calcolare l'area $A(R)$ della porzione di superficie $z = x^2 - y^2$ tale che $x^2 + y^2 \leq R^2$.

b) Determinare il comportamento asintotico di $A(R)$ quando $R \to 0$.

c) Determinare il comportamento asintotico di $A(R)$ quando $R \to \infty$; precisamente, dimostrare che, quando $R \to \infty$, si ha $A(R) \sim cR^3$, calcolando la costante c.

9.10 Esercizio

È data la catenoide, parametrizzata come segue:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ v \end{pmatrix}.$$

a) Determinare il comportamento del versore normale su un punto che tende all'infinito, cioè calcolare

$$\lim_{v \to \infty} N(u,v).$$

b) Sia $\Sigma(a)$ la regione di Σ tale che $|z| \leq a$. Calcolare Area$\Sigma(a)$ e determinare il suo comportamento asintotico quando $a \to \infty$.

c) Si assuma noto che la curvatura gaussiana è data da $K(u,v) = \dfrac{1}{\cosh^4 v}$. Calcolare

$$\int_{\Sigma(a)} K \, d\Sigma$$

e verificare che il limite di tale integrale, per $a \to \infty$ (detto anche *curvatura totale* di Σ) esiste finito. Calcolare tale limite.

9.11 Esercizio

Si consideri l'equazione (superficie di livello) $\Sigma : x^2 + y^2 + xy - z = 0$.

a) Parametrizzare Σ e calcolarne la curvatura gaussiana nel punto generico. Determinare la natura dei punti di Σ (ellittici, parabolici, o iperbolici).

b) Determinare le curvature principali e le direzioni principali nel punto $(0,0,0) \in \Sigma$.

c) Sia $p = (0,0,0)$. Determinare l'equazione di $T_p\Sigma$, il piano tangente a Σ in p. Dopo aver osservato che $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $T_p\Sigma$, calcolare $k_X(p)$ (la curvatura normale di Σ in p, nella direzione X). Determinare inoltre il valore massimo e il valore minimo di $k_X(p)$, al variare di X in $T_p\Sigma$ tale che $|X| = 1$.

9.12 Esercizio

Si consideri la curva $\alpha(u) = \begin{pmatrix} u \\ 1+u^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ del piano xy e il cilindro Σ che proietta α parallelamente al vettore $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Parametrizzare Σ e verificarne la regolarità.

b) Determinare curvatura gaussiana e curvatura media di Σ.

c) Determinare l'insieme dei punti di Σ in cui le curvature principali sono entrambe nulle.

d) Eliminare i parametri e trovare l'equazione cartesiana di Σ.

9.13 Esercizio

È data la superficie di equazione $z = 3x^2 - y^3$.

a) Calcolare la curvatura guassiana e stabilire la natura dei punti di Σ.

b) È vero che Σ è una superficie rigata ?