Parte 5 : Geodetiche

Alessandro Savo, Geometria Differenziale 2017-18

Indice delle sezioni

1 Geodetiche

1.1 Introduzione

In questa sezione definiremo le geodetiche di una superficie come curve parametrizzate dall'ascissa curvilinea la cui accelerazione è un vettore ovunque normale alla superficie (quindi tali che la componente tangenziale dell'accelerazione è nulla).

Queste curve hanno un'importante proprietà variazionale, che si può riassumere cosi'. Dati due punti p, q della superficie, consideriamo l'insieme $\Gamma(p, q)$ di tutte le curve $\alpha : [a, b] \to \Sigma$ contenute in Σ e tali che $\alpha(a) = p, \alpha(b) = q$. Allora, se p e q sono *sufficientemente vicini*, si può dimostrare che esiste un'unica curva $\gamma \in \Gamma(p, q)$ che ha lunghezza minima tra tutte le curve di $\Gamma(p, q)$; inoltre, tale curva è una geodetica. In altre parole, almeno *localmente*, le geodetiche generalizzano una ben nota proprietà delle rette del piano: quella di essere curve di lunghezza minima.

Il problema sarà dunque il seguente: data una superficie Σ, determinare esplicitamente tutte le sue curve geodetiche. Il problema è ricondotto a un'equazione differenziale del secondo ordine per ciascuna delle componenti di γ, e data una parametrizzazione regolare della superficie l'equazione differenziale delle geodetiche si scriverà in funzione delle entrate della prima forma fondamentale e delle sue derivate.

Chiudiamo questa introduzione esplicitando il ruolo della prima forma fondamentale nel calcolo della lunghezza di una curva.
Sia dunque $\alpha : [a, b] \to \Sigma$ un'arco di curva contenuto in Σ: allora $\alpha(t) = f(\gamma(t))$, dove $\gamma(t)$ è una curva in Ω; allora

$$\alpha(t) = f(u(t), v(t))$$

dove $u(t), v(t)$ sono le componenti di $\gamma(t)$. Si verifica immediatamente che $\alpha'(t) = u'(t)f_u + v'(t)f_v$, dunque

$$|\alpha'(t)|^2 = g_{11}u'(t)^2 + 2g_{12}u'(t)v'(t) + g_{22}v'(t)^2$$

dove si intende che g_{ij} sono le componenti della prima forma fondamentale calcolate in $u(t), v(t)$. Otteniamo:

Proposizione 1. *Sia* $\gamma(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ *(dove* $t \in [a, b]$*) una curva regolare nel dominio* Ω*. Allora la lunghezza della curva* $\alpha = f \circ \gamma$ *immagine di* γ *tramite* f*, è:*

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{g_{11}u'(t)^2 + 2g_{12}u'(t)v'(t) + g_{22}v'(t)^2}\, dt.$$

1.2 Definizione di geodetica

In primo luogo osserviamo che ogni vettore dello spazio si decompone in una parte tangente e una parte normale.

Lemma 2. *Sia* Σ *una superficie regolare,* $p \in \Sigma$ *e* N *il versore normale a* Σ *in* p*. Un vettore* ξ *dello spazio* $\mathbf{R}^3$ *ammette un'unica decomposizione ortogonale:*

$$\xi = \xi^T + \langle \xi, N \rangle N$$

dove $\xi^T \in T_p\Sigma$ *è detta* componente tangenziale*, mentre* $\langle \xi, N \rangle N$ *è detta* componente normale*.*

Dimostrazione. Fissato un punto $p \in \Sigma$ e una base (E_1, E_2) del piano tangente $T_p\Sigma$, osserviamo che la terna (E_1, E_2, N) è una base di $\mathbf{R}^3$. Se ξ è un vettore dello spazio, possiamo scrivere

$$\xi = aE_1 + bE_2 + cN,$$

per opportuni scalari a, b, c. Ora N è il versore normale a Σ in p, dunque $\langle N, E_i \rangle = 0$ per $i = 1, 2$. Prendendo il prodotto scalare ad ambo i membri, otteniamo

$$c = \langle \xi, N \rangle.$$

Dunque la decomposizione del lemma vale con $\xi^T = aE_1 + bE_2$. $\square$

Sia ora $\alpha : [a,b] \to \Sigma$ una curva contenuta in Σ, e decomponiamo il suo vettore accelerazione: $\alpha''(t) = (\alpha'')^T(t) + \langle \alpha''(t), N \rangle N$. Dal capitolo precedente sappiamo che la componente normale si esprime con la seconda forma fondamentale $\langle \alpha'', N \rangle = II(\alpha', \alpha')$. Dunque possiamo scrivere:

$$\alpha''(t) = (\alpha'')^T(t) + II(\alpha'(t), \alpha'(t))N.$$

Definizione 3. *Diremo che la curva parametrizzata α è una* geodetica *di Σ se $(\alpha'')^T(t) = 0$ per ogni $t \in [a,b]$; se cioè la componente tangenziale della sua accelerazione è identicamente nulla.*

Osserviamo le seguenti conseguenze della definizione.

Proposizione 4. *Una curva $\alpha : [a,b] \to \Sigma$ è una geodetica se e solo se per ogni $t \in [a,b]$ si ha:*

$$\alpha''(t) = \lambda(t) N(\alpha(t)). \tag{1}$$

dove N è il versore normale a Σ nel punto $\alpha(t)$, e dove

$$\lambda(t) = II(\alpha'(t), \alpha'(t)).$$

Inoltre, se α è una geodetica, il suo vettore velocità $\alpha'(t)$ ha norma costante (cioè, una geodetica è sempre parametrizzata proporzionalmente all'ascissa curvilinea).

Dimostrazione. La (1) è immediata da quanto detto. Ora si ha:

$$\frac{d}{dt}|\alpha'(t)|^2 = 2\langle \alpha''(t), \alpha'(t) \rangle = 2\lambda(t) \langle N(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = 0$$

Dunque $|\alpha'(t)|$ è costante.

□

Conviene mettere in evidenza che qui N indica il *versore normale della superficie*, e non il versore normale della curva. Per evitare ambiguità indicheremo con N_Σ tale versore. Dunque la condizione necessaria e sufficiente affinche' la curva $\alpha(t)$ con $|\alpha'(t)| = costante$ è:

$$\alpha''(t) \wedge N_\Sigma(\alpha(t)) = 0 \quad \text{per ogni } t.$$

Vedremo piu' in avanti che in generale, se t è un parametro qualunque, la curva $\alpha(t)$ è una geodetica se e solo se

$$\det\Big(\alpha'(t), \alpha''(t), N_\Sigma(\alpha(t))\Big) = 0 \quad \text{per ogni } t.$$

2 Derivazione covariante

Ricordiamo che un *campo di vettori su una superficie* è una funzione che associa a ogni punto $p \in \Sigma$ un vettore $\xi(p) \in \mathbf{R}^3$:

$$\xi : \Sigma \to \mathbf{R}^3.$$

Possiamo derivare ξ lungo un vettore tangente $X_p \in T_p\Sigma$:

$$\nabla_{X_p}\xi = \frac{d}{dt}|_{t=0}\xi(\alpha(t))$$

dove $\alpha(t)$ è una qualunque curva in Σ tale che $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = X_p$. Il risultato è un vettore di $\mathbf{R}^3$. Notiamo che $\nabla_{X_p}\xi$ dipende solo dai valori che ξ assume sulla curva integrale $\alpha(t)$ di X_p, per t piccolo in valore assoluto.

Un campo di vettori ξ si dice *tangente* a Σ se, per ogni p, il vettore $\xi(p)$ è tangente a Σ, ovvero:

$$\langle \xi(p), N_\Sigma(p)\rangle = 0 \quad \text{per ogni } p \in \Sigma.$$

Il campo ξ si dice *normale* se $\xi(p)$ è ortogonale a $T_p\Sigma$ per ogni p. Ovviamente N_Σ è un campo normale a Σ. In generale, un campo di vettori normale si scrive $\xi(p) = \phi(p)N_\Sigma(p)$ per un'opportuna funzione differenziabile ϕ su Σ.

Se X è un campo di vettori tangente a Σ, allora $\nabla_X\xi$ è esso stesso un campo di vettori su Σ (non necessariamente tangente !), che associa a ciascun punto p di Σ il vettore $\nabla_{X_p}\xi$ di $\mathbf{R}^3$.

Questa operazione verifica le seguenti proprietà. In cio' che segue, h è una funzione differenziabile su Σ, X_i è un campo di vettori tangente e ξ_i è un campo di vettori qualunque.

$$\begin{aligned}
\nabla_{hX}\xi &= h\nabla_X\xi \\
\nabla_X(h\xi) &= (\nabla_X h)\xi + h\nabla_X\xi \\
\nabla_{X_1+X_2}\xi &= \nabla_{X_1}\xi + \nabla_{X_2}\xi \\
\nabla_X(\xi_1+\xi_2) &= \nabla_X\xi_1 + \nabla_X\xi_2 \\
\nabla_X\langle\xi_1,\xi_2\rangle &= \langle\nabla_X\xi_1,\xi_2\rangle + \langle\xi_1,\nabla_X\xi_2\rangle
\end{aligned} \tag{2}$$

2.1 Derivata covariante di un campo tangente

Supponiamo ora che X e ξ siano campi di vettori tangenti a Σ. Allora la derivata $\nabla_X\xi$ è un campo di vettori che non è, in generale, tangente a Σ. Pero', possiamo proiettare tale vettore sul piano tangente alla superficie, e definire quindi:

$$\nabla^T_X\xi \doteq (\nabla_X\xi)^T,$$

la componente tangenziale della derivata di ξ lungo X.

Definizione 5. *Dati campi di vettori tangenti X, ξ, il campo di vettori tangenti $\nabla^T_X \xi$ è detto* derivata covariante di ξ lungo X. *Dunque, l'operazione di derivazione covariante ∇^T si ottiene per proiezione ortogonale della derivata ordinaria sul piano tangente alla superficie.*

Abbiamo la decomposizione:

$$\nabla_X \xi = \nabla^T_X \xi + \langle \nabla_X \xi, N \rangle N.$$

Ora, derivando l'identita $\langle \xi, N \rangle = 0$ lungo il vettore X otteniamo:

$$0 = \langle \nabla_X \xi, N \rangle + \langle \xi, \nabla_X N \rangle = \langle \nabla_X \xi, N \rangle - II(X, \xi).$$

Dunque la decomposizione assume la forma:

$$\nabla_X \xi = \nabla^T_X \xi + II(X, \xi) N. \tag{3}$$

La (3) è detta anche *decomposizione di Gauss*.

• Notiamo che, se $\alpha = \alpha(t)$ è una curva su Σ e se $X = \alpha'$, allora $\nabla^T_{\alpha'} \xi$ è un campo di vettori tangenti, che scriveremo:

$$\nabla^T_{\alpha'} \xi \doteq \frac{D\xi}{dt}.$$

In particolare, se $\xi = \alpha'$, allora $\nabla^T_{\alpha'} \alpha'$ è la componente tangenziale dell'accelerazione di α.

Dall'espressione (3) si verifica che la derivata covariante soddisfa le seguenti proprietà, analoghe a quelle della derivata in $\mathbf{R}^3$. Qui h è una funzione differenziabile su Σ e X, ξ, X_i, ξ_i sono campi di vettori tangenti:

$$\begin{aligned} \nabla^T_{hX} \xi &= h \nabla^T_X \xi \\ \nabla^T_X (h\xi) &= (\nabla_X h) \xi + h \nabla^T_X \xi \\ \nabla^T_{X_1 + X_2} \xi &= \nabla^T_{X_1} \xi + \nabla^T_{X_2} \xi \\ \nabla^T_X (\xi_1 + \xi_2) &= \nabla^T_X \xi_1 + \nabla^T_X \xi_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Infine, la regola di Leibniz:

$$\nabla_X \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \nabla^T_X \xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, \nabla^T_X \xi_2 \rangle$$

2.2 Simboli di Christoffel

Sia $f : \Omega \to \Sigma$ una parametrizzazione (iniettiva) della superficie Σ.

• *Nota bene* : in questa sezione le coordinate in Ω saranno scritte come (u_1, u_2) e useremo la seguente notazione:

$$E_1 = \frac{\partial f}{\partial u_1}, \quad E_2 = \frac{\partial f}{\partial u_2}.$$

La coppia di campi di vettori tangenti (E_1, E_2) è una base di $T_p\Sigma$ in ogni punto p. Ricordiamo che la seconda forma fondamentale sui campi di vettori tangenti X, Y è definita cosi':

$$II(X, Y) = -\langle \nabla_X N, Y\rangle = \langle N, \nabla_X Y\rangle,$$

Dunque la matrice l di II nella base (E_1, E_2) si scrive

$$l_{ij} = \langle N, \nabla_{E_i} E_j\rangle.$$

In conclusione, la decomposizione (3) sui vettori della base è:

$$\nabla_{E_i} E_j = \nabla^T_{E_i} E_j + l_{ij} N.$$

Ora, in ogni punto, il vettore tangente $\nabla^T_{E_i} E_j$ si scriverà come combinazione lineare di E_1, E_2:

$$\nabla^T_{E_i} E_j = \Gamma^1_{ij} E_1 + \Gamma^2_{ij} E_2, \quad i, j = 1, 2. \tag{5}$$

Definizione 6. *I coefficienti* Γ^k_{ij} *in* (5)*, dove* $i, j, k = 1, 2$*, sono detti* simboli di Christoffel *della parametrizzazione.*

Dunque, i simboli di Christoffel permettono di calcolare la derivata covariante di campi di vettori su Σ. Vedremo in seguito come calcolarli; in ogni modo Γ^k_{ij} sono funzioni differenziabili di $(u_1, u_2) \in \Omega$.

2.3 Derivata covariante di un campo di vettori lungo una curva

Se $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ è una curva su Σ, un *campo di vettori lungo* α è una funzione che associa a ogni $t \in [a, b]$ un vettore di $\mathbf{R}^3$, che scriveremo

$$\xi(\alpha(t)).$$

Sappiamo come derivare ξ lungo α: $\nabla_{\alpha'(t)}\xi = \dfrac{d}{dt}\xi(\alpha(t))$.
Ad esempio, α' è un campo di vettori lungo α ; esso risulta tangente a Σ e si ha:

$$\nabla_{\alpha'(t)}\alpha' = \alpha''(t)$$

per definizione.

Ora, anche se ξ è un campo di vettori tangente a Σ, la sua derivata lungo la curva : $\nabla_{\alpha'}\xi$ non lo sarà, in generale. Dunque poniamo

$$\nabla^T_{\alpha'}\xi \doteq (\nabla_{\alpha'}\xi)^T,$$

che chiameremo *derivata covariante di* ξ *lungo* α. È per costruzione un vettore tangente a Σ, che denoteremo anche

$$\nabla^T_{\alpha'}\xi \doteq \frac{D\xi}{dt}.$$

Notiamo che

$$\nabla^T_{\alpha'}\alpha' = (\alpha'')^T.$$

In questo linguaggio, abbiamo che

- $\alpha(t)$ è una geodetica se e solo se $\nabla^T_{\alpha'}\alpha' = 0$, ovvero se e solo se $\dfrac{D\alpha'}{dt} = 0$.

2.4 Espressione in funzione dei simboli di Christoffel

Fissata una curva $\alpha : [a, b] \to \Sigma$ e un campo di vettori ξ lungo α, vogliamo ora esprimere la derivata covariante di ξ lungo $\alpha = \alpha(t)$:

$$\frac{D\xi}{dt} = \nabla^T_{\alpha'}\xi$$

in funzione dei simboli di Christoffel. Se $h = h(t)$ è una funzione della variabile t, e ξ è un campo di vettori lungo α, allora la regola di Leibniz implica:

$$\frac{D}{dt}(h(t)\xi) = h'(t)\xi + h(t)\frac{D\xi}{dt}.$$

Esprimendo ξ nella base (E_1, E_2), si ha

$$\xi = \xi_1(t)E_1 + \xi_2(t)E_2$$

dove i coefficienti $\xi(t), \xi_2(t)$ sono funzioni di t. Dunque:

$$\frac{D\xi}{dt} = \xi_1'(t)E_1 + \xi_1(t)\frac{DE_1}{dt} + \xi_2'(t)E_2 + \xi_2(t)\frac{DE_2}{dt}$$

Ora si ha $\alpha(t) = f(\gamma(t)) = f(u_1(t), u_2(t))$, da cui otteniamo:

$$\alpha'(t) = u_1'(t)E_1 + u_2'(t)E_2.$$

Dunque (vedi (4)):

$$\begin{aligned}\frac{DE_j}{dt} &= \nabla^T_{\alpha'}E_j \\ &= u_1'(t)\nabla^T_{E_1}E_j + u_2'(t)\nabla^T_{E_2}E_j \\ &= u_1'(t)\sum_k \Gamma^k_{1j}E_k + u_2'(t)\sum_k \Gamma^k_{2j}E_k \\ &= \sum_{i,k}\Gamma^k_{ij}u_i'(t)E_k.\end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione precedente, otteniamo la seguente proposizione.

Proposizione 7. *La derivata covariante del campo di vettori* ξ *lungo* $\alpha(t) = f(u_1(t), u_2(t))$ *è data da:*

$$\frac{D\xi}{dt} = \nabla^T_{\alpha'}\xi = \sum_{k=1}^{2}\Big(\xi'_k(t) + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma^k_{ij}u'_i(t)\xi_j(t)\Big)E_k.$$

In particolare, prendendo $\xi = \alpha'$, *si ha la seguente espressione dell'accelerazione tangenziale:*

$$(\alpha''(t))^T = \frac{D\alpha'}{dt} = \sum_{k=1}^{2}\Big(u''_k(t) + \sum_{i,j=1}^{2}\Gamma^k_{ij}u'_i(t)u'_j(t)\Big)E_k,$$

dove $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(u_1(t), u_2(t))$ *sono i simboli di Christoffel.*

3 Equazioni delle geodetiche

Ricordiamo che una geodetica è una curva α su Σ la cui accelerazione tangenziale è nulla. Dunque per il calcolo precedente abbiamo:

Proposizione 8. *La curva*

$$\alpha(t) = f(u_1(t), u_2(t))$$

è una geodetica sull'intervallo $t \in [a, b]$ *se e solo se le componenti* $u_1(t), u_2(t)$ *soddisfano il sistema di equazioni differenziali:*

$$\begin{cases} u''_1(t) + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma^1_{ij}u'_i(t)u'_j(t) = 0 \\ u''_2(t) + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma^2_{ij}u'_i(t)u'_j(t) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

dove $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(u_1(t), u_2(t))$ *sono i simboli di Christoffel della parametrizzazione.*

Come conseguenza di questo calcolo, e della teoria dei sistemi di equazioni differenziali, otteniamo il seguente teorema di esistenza e unicità (locale) delle geodetiche di una superficie.

Teorema 9. *Sia* Σ *una superficie parametrizzata da* $f : \Omega \to \mathbf{R}^3$. *Fissiamo un punto* $p \in \Sigma$ *e un vettore tangente* $X \in T_p\Sigma$. *Allora esiste* $\epsilon > 0$ *e una geodetica* $\alpha_X : [-\epsilon, \epsilon] \to \Sigma$ *tale che* $\alpha_X(0) = p, \alpha'_X(0) = X$. *Inoltre, tale geodetica è unica.*

Quindi, fissati un punto p e una direzione ξ (vettore tangente alla superficie, di modulo unitario), esiste un'unica geodetica α_ξ che origina nel punto p e ha vettore velocità, in quel punto, prescritto da ξ. Sappiamo che ogni geodetica ha vettore velocità di modulo costante: quindi, se ξ ha modulo unitario, α_ξ sarà parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Se X ha modulo $c > 0$, allora il vettore $\xi = \frac{1}{c}X$ ha modulo unitario; è chiaro che α_X e α_ξ

originano in p e hanno la stessa traccia. Tale traccia è percorsa con velocità unitaria da α_ξ e con velocità costante, pari a c, da α_X.

Per la dimostrazione del teorema, supponiamo che $p = f(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ e $X = a_1 E_1(p) + a_2 E_2(p)$. Le equazioni delle geodetiche sono del secondo ordine: dalla teoria delle equazioni differenziali abbiamo che, se si fissa il dato iniziale, e la sua derivata prima, otteniamo un'unica soluzione, almeno per tempi piccoli. Quindi esiste un'unica soluzione $(u_1(t), u_2(t))$ del sistema di equazioni differenziali (6), con dati iniziali

$$(u_1(0), u_2(0)) = (\bar{u}_1, \bar{u}_2), \quad (u_1'(0), u_2'(0)) = (a_1, a_2)$$

definita in un intervallo $[-\epsilon, \epsilon]$ contenente 0. È chiaro allora che la curva $\alpha(t) = f(u_1(t), u_2(t))$ soddisfa i requisiti del teorema.

3.1 Calcolo dei simboli di Christoffel

Ricordiamo che i simboli di Christoffel Γ_{ij}^k sono definiti dalle relazioni:

$$\nabla_{E_i}^T E_j = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k E_k.$$

Un calcolo diretto (che non espliciteremo) mostra il seguente fatto.

Lemma 10. *Se g^{ij} sono le entrate della matrice g^{-1}, allora:*

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_{r=1}^2 g^{rk}\{ij, r\}, \tag{7}$$

dove $\{ij, r\}$, detti simboli di Christoffel di prima specie*, sono dati da*

$$\begin{aligned} \{ij, r\} &= \langle E_{ij}, E_r \rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{jr}}{\partial u_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_r}\Big) \end{aligned}$$

e dove $E_{ij} = \dfrac{\partial E_i}{\partial u_j}$.

Notiamo che $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Dunque, si hanno al massimo sei simboli di Christoffel distinti e le relazioni (7) forniscono formule esplicite per il loro calcolo.

3.2 Esempio: formule in una parametrizzazione ortogonale

Supponiamo che la parametrizzazione sia *ortogonale* (nel senso che $\langle E_1, E_2 \rangle = 0$ ovunque). Allora

$$g_{12} = 0, \quad g^{kk} = \frac{1}{g_{kk}}.$$

Indichiamo, come al solito, con h_i la derivata parziale della funzione h rispetto a u_i. Un calcolo mostra:

$$\begin{array}{lll} \{11,1\} = \frac{1}{2} g_{11,1} & \{11,2\} = -\frac{1}{2} g_{11,2} & \{12,1\} = \frac{1}{2} g_{11,2} \\ \{12,2\} = \frac{1}{2} g_{22,1} & \{22,1\} = -\frac{1}{2} g_{22,1} & \{22,2\} = \frac{1}{2} g_{22,2} \end{array}$$

Dunque:

$$\begin{array}{lll} \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2g_{11}} g_{11,1} & \Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2g_{22}} g_{11,2} & \Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = \frac{1}{2g_{11}} g_{11,2} \\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{2g_{22}} g_{22,1} & \Gamma^1_{22} = -\frac{1}{2g_{11}} g_{22,1} & \Gamma^2_{22} = \frac{1}{2g_{22}} g_{22,2} \end{array} \tag{8}$$

Riassumiamo il calcolo nel seguente

Lemma 11. *In una parametrizzazione ortogonale ($g_{12} = 0$) si hanno le relazioni* (8), *ovvero:*

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ik} &= \frac{1}{2g_{kk}} \frac{\partial g_{kk}}{\partial u_i} \quad \textit{per ogni } i, k \\ \Gamma^k_{ii} &= -\frac{1}{2g_{kk}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial u_k} \quad \textit{per ogni } i \neq k \end{aligned}$$

Applichiamo il calcolo alla situazione in cui la prima forma fondamentale, oltre a essere diagonale ($g_{12} = 0$) è tale che $g_{22} = 1$ e g_{11} dipende solo da u_2. Parametrizzazioni di questo tipo sono importanti, e includono le superfici di rotazione. Dunque supporremo che la prima forma fondamentale sia del tipo:

$$g(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} \phi(u_2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque $g_{11}(u_1, u_2) = \phi(u_2)^2$ con $\phi(u_2) > 0$ per ogni u_2. Dal lemma precedente osserviamo che i simboli di Christoffel non nulli sono solo due:

$$\begin{cases} \Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2} g_{11,2} = -\phi(u_2)\phi'(u_2) \\ \Gamma^1_{12} = \frac{1}{2g_{11}} g_{11,2} = \frac{\phi'(u_2)}{\phi(u_2)} \end{cases}$$

Le equazioni delle geodetiche sono quindi

$$\begin{cases} u_1'' + 2\Gamma^1_{12} u_1' u_2' = 0 \\ u_2'' + \Gamma^2_{11} (u_1')^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} u_1'' + 2\frac{\phi'(u_2)}{\phi(u_2)} u_1' u_2' = 0 \\ u_2'' - \phi(u_2)\phi'(u_2)(u_1')^2 = 0 \end{cases}.$$

In conclusione, abbiamo dimostrato il seguente risultato.

Teorema 12. *Supponiamo che la prima forma fondamentale sia del tipo*

$$g(u_1,u_2)=\begin{pmatrix}\phi(u_2)^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

con $\phi>0$. Allora le equazioni delle geodetiche sono:

$$\begin{cases} u_1''+2\dfrac{\phi'(u_2)}{\phi(u_2)}u_1'u_2'=0\\ u_2''-\phi(u_2)\phi'(u_2)(u_1')^2=0\end{cases}$$

- Notiamo che le linee coordinate $u_1=c$ sono geodetiche : infatti

$$\begin{cases} u_1=c\\ u_2=t\end{cases}$$

soddisfa entrambe le equazioni delle geodetiche.

Come conseguenza del teorema, abbiamo il seguente risultato.

Corollario 13. *Supponiamo che la parametrizzazione sia del tipo*

$$g(u_1,u_2)=\begin{pmatrix}\phi(u_2)^2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Se $\alpha(t)$ è una geodetica parametrizzata dall'ascissa curvilinea, e se $\theta(t)$ è l'angolo acuto (vale a dire, $\theta(t)\in[0,\frac{\pi}{2}]$) tra il vettore velocità e la linea coordinata $u_2=c$ passante per $\alpha(t)$, allora si ha che la funzione

$$\mu(t)=\phi(u_2(t))\cos\theta(t)$$

è costante.

Dimostrazione. Notiamo che il vettore $\dfrac{1}{|E_1|}E_1$ è uno dei due versori tangenti della linea coordinata $u_2=c$, dunque, poiche' $\alpha'(t)$ è di modulo unitario, si avra':

$$\cos\theta(t)=\pm\langle\alpha'(t),\frac{E_1}{|E_1|}\rangle\quad\text{ovvero}\quad |E_1|\cos\theta=\pm\langle\alpha'(t),E_1\rangle.$$

D'altra parte $|E_1|=\sqrt{g_{11}}=\phi(u_2)$. Ne segue che

$$\mu(t)=\pm\langle\alpha'(t),E_1\rangle,$$

e basta dimostrare che la funzione $\langle\alpha'(t),E_1\rangle$ è costante. Ora sappiamo che $\alpha'(t)=u_1'(t)E_1+u_2'(t)E_2$; allora

$$\langle\alpha'(t),E_1\rangle=u_1'(t)\phi(u_2(t))^2.$$

La derivata rispetto a t si esprime:

$$\frac{d}{dt}\langle\alpha'(t),E_1\rangle=\phi(u_2)^2\Big(u_1''+2\frac{\phi'(u_2)}{\phi(u_2)}u_1'u_2'\Big)$$

e risulta nulla per ogni t per la prima delle equazioni delle geodetiche. $\square$

4 Geodetiche sulle superfici di rotazione

Una superficie di rotazione si parametrizza:

$$f(u_1, v_2) = \begin{pmatrix} \phi(u_2)\cos u_1 \\ \phi(u_2)\sin u_1 \\ \psi(u_2) \end{pmatrix}, \quad (u_1, u_2) \in (-\pi, \pi) \times (a, b). \tag{9}$$

La curva *profilo* (anche detta *generatrice*) nel piano xz è $\alpha(u_2) = \begin{pmatrix} \phi(u_2) \\ 0 \\ \psi(u_2) \end{pmatrix}$, e Σ si ottiene per rotazione di α intorno all'asse z.

- *Assumeremo in questa sezione che α sia parametrizzata dall'ascissa curvilinea, quindi* $\left(\frac{d\phi}{du_2}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{du_2}\right)^2 = 1$ *per ogni $u_2 \in (a, b)$.*
- Notiamo anche che $\phi(u_2)$ misura la distanza dall'asse di rotazione (asse z).

La prima forma fondamentale della parametrizzazione è

$$g = \begin{pmatrix} \phi(u_2)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

ed è del tipo specificato in precedenza, con $g_{11}(u_2) = \phi(u_2)^2$. Le equazioni delle geodetiche sono quindi :

$$\begin{cases} u_1'' + 2\dfrac{\phi'(u_2)}{\phi(u_2)} u_1' u_2' = 0 \\ u_2'' - \phi(u_2)\phi'(u_2)(u_1')^2 = 0 \end{cases} \tag{11}$$

La proposizione che segue enuncia dei risultati gia' noti, dimostrati usando la definizione di geodetica.

Proposizione 14. *Sia Σ una superficie di rotazione, parametrizzata come in* (9)*. Allora:*

a) *Ogni meridiano è una geodetica.*

b) *Il parallelo $u_2 = c$ è una geodetica se e solo se $\phi'(c) = 0$.*

Dimostrazione. a) Basta osservare che il meridiano $u_1 = c$ si parametrizza $\begin{cases} u_1 = c \\ u_2 = t \end{cases}$ e quindi verifica le equazioni delle geodetiche. La parte b) è lasciata per esercizio. □

5 Teorema di Clairaut

Abbiamo il seguente teorema, noto come *Teorema di Clairaut*.

Teorema 15. *Sia Σ una superficie di rotazione, parametrizzata come in* (9)*, e sia $\alpha : [a,b] \to \Sigma$ una geodetica di Σ parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Poniamo:*

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \textit{distanza di } \alpha(t) \textit{ dall'asse di rotazione (asse } z\textit{)},\\ \theta(t) &= \textit{angolo tra } \alpha'(t) \textit{ e il parallelo passante per } \alpha(t) \end{aligned}$$

($\theta(t)$ si intende acuto: $\theta(t) \in [0, \frac{\pi}{2}]$). Allora la funzione

$$\mu(t) = \rho(t)\cos\theta(t)$$

è costante sull'intervallo $[a,b]$.

Dimostrazione. Dall'ipotesi abbiamo che la prima forma fondamentale è del tipo (10). Possiamo quindi applicare il corollario 13; la tesi segue dal fatto che $\phi(u_2(t)) = \rho(t)$ è nel nostro caso la distanza dall'asse di rotazione, e che le linee $u_2 = c$ sono i paralleli della superficie.

□

5.1 Esempio

Esercizio. *Consideriamo la curva α del piano xz definita dal seguente grafico:*

$$x = z^4 - 2z^2 + 2,$$

e sia Σ la superficie ottenuta ruotando α intorno all'asse z. La parametrizzazione è

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \phi(v)\cos u \\ \phi(v)\sin u \\ v \end{pmatrix}$$

dove $\phi(v) = v^4 - 2v^2 + 2$.

a) *Determinare i paralleli che sono geodetiche.*

b) *Sia Γ il parallelo $z = 0$, e sia p un punto qualunque di Γ. Si consideri la geodetica $\gamma = \gamma(s)$, parametrizzata dall'ascissa curvilinea, tale che:*

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = X,$$

dove X è diretto nel verso delle z crescenti, e forma un angolo $\theta_0 \in [0, \pi/2]$ con Γ. Sia S la striscia

$$S = \{-1 \leq z \leq 1\}.$$

Determinare i valori di θ_0 per i quali $\gamma(s) \in S$ per ogni $s \in [0, \infty)$.

Soluzione. La funzione $\phi(v)$ misura la distanza dall'asse di rotazione (l'asse z). Uno studio del suo grafico mostra che i punti critici di $\phi(v)$ (le radici di $\phi'(v) = 4v^3 - 4v$) sono $v_1 = 0$ (massimo locale $\phi(v_1) = 2$), e $v_2, 3 = \pm 1$ (minimi assoluti $\phi(v_i) = 1$). Inoltre $\phi(v)$ tende a $+\infty$ quando $v \to \pm\infty$. Dunque :

- i soli paralleli che risultano geodetiche sono $\Gamma = \{z = 0\}, \Gamma_1 = \{z = 1\}, \Gamma_2 = \{z = -1\}$. In particolare il bordo di S, che consiste dei paralleli Γ_1 e Γ_2, è formato da geodetiche.

Per rispondere alla parte b), usiamo il teorema di Clairaut:

$$\rho(s)\cos\theta(s) = c$$

dove c è costante; poiche' $\rho(0) = 2$ (il raggio di Γ), e $\theta(0) = \theta_0$, otteniamo

$$\rho(s)\cos\theta(s) = 2\cos\theta_0$$

per ogni s. Ora abbiamo ovviamente $\gamma(0) \in S$; se γ uscisse da S, allora esisterebbe s_0 tale che $\gamma(s) \in \Gamma_1$ oppure $\gamma(s) \in \Gamma_2$. In entrambi i casi $\rho(s_0) = 1$, dunque $\cos\theta(s_0) = 2\cos\theta_0$, e poiché $\cos\theta(s_0) \leq 1$ otteniamo

$$2\cos\theta_0 \leq 1$$

ovvero

$$\theta_0 \geq \frac{\pi}{3}.$$

Ne segue che, se $\theta_0 < \dfrac{\pi}{3}$, allora γ non esce mai da S. Vediamo cosa succede nel caso in cui $\gamma(s_0) \in \Gamma_i$ e $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$. Allora, necessariamente, $\theta(s_0) = 0$ dunque γ è tangente al parallelo Γ_i: ma questo è impossibile, poiche' se p è il punto di tangenza allora avremmo due geodetiche (γ e Γ_i) uscenti da p e aventi la stessa direzione in p, e questo contraddice la proprieta' di unicita' di cui al precedente teorema. Dunque γ non raggiunge mai Γ_i.

- Conclusione: se $\theta_0 \leq \frac{\pi}{3}$ allora γ non esce da S (in realtà, è interamente contenuta nella striscia aperta $\{-1 < z < 1\}$).

Si può dimostrare che vale anche il viceversa, cioè che, se $\theta_0 > \frac{\pi}{3}$ allora γ uscira' in un tempo finito dalla striscia S senza mai farvi ritorno; piu' precisamente, se $\theta_0 > \frac{\pi}{3}$ allora la quota (terza coordinata) di $\gamma(t)$ è una funzione crescente di s, che tende a $+\infty$ quando $s \to \infty$.

5.2 Teorema di Clairaut inverso

Possiamo invertire il teorema di Clairaut ? In altre parole, è vero che, se $\alpha : I \to \Sigma$ è una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea e $\mu(t)$ è costante su α, allora necessariamente α è una curva geodetica ?

In generale la risposta è no: per costruire un controesempio, basta osservare che un qualunque parallelo (parametrizzato dall'a.c.) ha $\mu(t)$ costante, pari alla distanza dall'asse di rotazione (che è costante su ogni parallelo). Dunque basta prendere un parallelo che non sia una geodetica. La proposizione che segue (di cui tralasciamo la dimostrazione) mostra però che, se $\mu(t)$ è costante su α, e se α soddisfa una certa condizione di *trasversalità*, allora α è una geodetica.

Proposizione 16. *Sia Σ una superficie di rotazione, e $\alpha : I \to \Sigma$ una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Supponiamo che $\mu(t)$ sia una funzione costante su α e che α incontri ciascun parallelo in un insieme finito (eventualmente vuoto) di punti. Allora α è una geodetica.*

- Ad esempio, un'elica (a passo positivo) di un cilindro circolare retto incontra ogni singolo parallelo in un solo punto, dunque la condizione di trasversalità è verificata. Poiché la distanza dall'asse è costante, e l'angolo con cui un'elica incontra i paralleli è sempre lo stesso, $\mu(t)$ è costante e quindi tutte le eliche sono geodetiche.

6 Curvatura geodetica e curvatura normale

6.1 Curvatura geodetica

Sia $\alpha : I \to \Sigma$ una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea s, interamente contenuta nella superficie parametrizzata Σ con versore normale che scriveremo N_Σ (per distinguerlo dal versore normale della curva α). Allora possiamo decomporre il vettore accelerazione nelle sue parti tangente e normale:

$$\alpha''(s) = (\alpha''(s))^T + (\alpha''(s))^N.$$

Sappiamo che la parte normale si scrive:

$$(\alpha''(s))^N = II(\alpha'(s), \alpha'(s))N_\Sigma, \tag{12}$$

dove N_Σ è il versore normale della parametrizzazione e II è la seconda forma fondamentale. Ora α è una geodetica se e solo se $(\alpha'')^T = 0$; in generale, il vettore $(\alpha'')^T$ misura in qualche modo la "curvatura tangenziale" di α.

Proposizione 17. *Il vettore $\alpha''(s)^T$ è ortogonale sia a $N_\Sigma(\alpha(s))$ che a $\alpha'(s)$, e si scrive*

$$\alpha''(s)^T = k_g(s)N_\Sigma(\alpha(s)) \wedge \alpha'(s),$$

per uno scalare $k_g(s)$, detto curvatura geodetica *di α in s. Si ha:*

$$|k_g(s)| = |\alpha''(s)^T|$$

e la curva α è una geodetica di Σ se e solo se ha curvatura geodetica identicamente nulla.

Dimostrazione. Poiche' α è parametrizzata dall'ascissa curvilinea, si ha che α'' è ortogonale a α', e allora

$$0 = \langle \alpha'', \alpha' \rangle = \langle \alpha''^T, \alpha' \rangle + II(\alpha', \alpha')\langle N_\Sigma, \alpha' \rangle = \langle (\alpha'')^T, \alpha' \rangle,$$

dunque il vettore $(\alpha'')^T$ è ortogonale a α'. Esso è, per definizione, ortogonale al versore normale alla superficie dunque è parallelo al prodotto vettoriale $N_\Sigma \wedge \alpha'$. □

La proposizione che segue fornisce una formula esplicita per il calcolo della curvatura geodetica.

Proposizione 18. a) *Se α è una curva di Σ parametrizzata dall'ascissa curvilinea s, si ha:*

$$k_g(s) = \det(\alpha'(s), \alpha''(s), N_\Sigma(\alpha(s))).$$

b) *Se $\alpha = \alpha(t)$, dove t è un parametro qualunque, allora*

$$k_g(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^3} \cdot \det\Big(\alpha'(t), \alpha''(t), N_\Sigma(\alpha(t))\Big)$$

Dimostrazione. a) Osserviamo in primo luogo che, prendendo il prodotto scalare con il vettore unitario $N_\Sigma \wedge \alpha'$ ad ambo i membri della relazione $(\alpha'')^T = k_g N_\Sigma \wedge \alpha'$ (valida se il parametro è l'ascissa curvilinea) otteniamo l'espressione

$$k_g = \langle (\alpha'')^T, N_\Sigma \wedge \alpha' \rangle.$$

Ora poichè $N_\Sigma \wedge \alpha'$ è tangente alla superficie, abbiamo anche

$$k_g = \langle \alpha'', N_\Sigma \wedge \alpha' \rangle = \det(\alpha'', N_\Sigma, \alpha'),$$

e un doppio scambio di colonne (che non altera il segno del determinante) porta all'espressione in a).

b) Supponiamo ora che il parametro t non sia l'ascissa curvilinea. Possiamo riparametrizzare α con l'ascissa curvilinea $s(t)$ e scrivere

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t)) \quad \text{dove} \quad |\bar{\alpha}'(s)| \equiv 1$$

Se $v(t) = s'(t) = |\alpha'(t)|$ abbiamo allora:

$$\alpha'(t) = v(t)\bar{\alpha}'(s).$$

Derivando ancora vediamo che

$$\alpha''(t) = v'(t)\bar{\alpha}'(s) + v(t)^2\bar{\alpha}''(s).$$

Dalla linearità del determinante, considerato che $\det(\bar{\alpha}', \bar{\alpha}', N_\Sigma) = 0$ arriviamo all'espressione

$$\begin{aligned} \det\Big(\alpha'(t), \alpha''(t), N_\Sigma(\alpha(t))\Big) &= v(t)^3 \det\Big(\bar{\alpha}'(s), \bar{\alpha}''(s), N_\Sigma(\bar{\alpha}(s))\Big) \\ &= v(t)^3 k_g(s(t)) \end{aligned}$$

da cui l'espressione in b). $\square$

6.2 Direzioni asintotiche, curve asintotiche

Ricordiamo che, se X è un vettore unitario del piano tangente in p, il numero

$$k_X(p) = II(X, X)$$

esprime la curvatura, in p, della sezione normale ottenuta intersecando Σ con il piano passante per p e contenente X e $N_\Sigma(p)$.

• Il vettore $X \in T_p\Sigma$ si dice *direzione asintotica* se $II(X, X) = 0$ ovvero, la curvatura della sezione normale nel punto p è nulla nella direzione X.

Proposizione 19. a) *Se l è la matrice della seconda forma fondamentale, e se $X = a_1E_1 + a_2E_2$, allora X è direzione asintotica se e solo se*

$$l_{11}a_1^2 + 2l_{12}a_1a_2 + l_{22}a_2^2 = 0.$$

b) *In un punto ellittico non ci sono direzioni asintotiche.*

c) *In un punto iperbolico esistono due direzioni asintotiche linearmente indipendenti.*

d) *In un punto parabolico, non planare, esiste un'unica direzione asintotica.*

Dimostrazione. a) Per definizione si ha: $l_{ij} = II(E_i, E_j)$. Dalla bilinearita' della forma II otteniamo facilmente

$$II(X, X) = l_{11}a_1^2 + 2l_{12}a_1a_2 + l_{22}a_2^2.$$

b) Siano $k_1(p), k_2(p)$ le curvature principali e (v_1, v_2) una base ortonormale di $T_p\Sigma$ formata da autovettori di W associati rispettivamente a v_1 e v_2. Se X forma con v_1 un angolo θ, sappiamo che

$$II(X, X) = k_1(p)\cos^2\theta + k_2(p)\sin^2\theta.$$

Ora, se p è ellittico, allora $k_1(p), k_2(p)$ sono entrambi positivi, o entrambi negativi. Nel primo caso il secondo membro è positivo per ogni valore di θ, dunque $II(X, X)$ non può mai annullarsi. Analoga conclusione si ha nel secondo caso. Dunque non ci sono direzioni asintotiche.

c) Se p è un punto iperbolico allora $k_1(p)$ e $k_2(p)$ hanno segno opposto, dunque $k_1(p) > 0$ e $k_2(p) < 0$, oppure $k_1(p) < 0$ e $k_2(p) > 0$. Nel primo caso possiamo scrivere:

$$k_1(p) = \lambda^2, \quad k_2(p) = -\mu^2$$

con λ, μ numeri positivi. Allora si ha:

$$II(X, X) = \lambda^2\cos^2\theta - \mu^2\sin^2\theta.$$

Sia θ_1 l'unico angolo nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$ tale che $\tan\theta_1 = \dfrac{\lambda}{\mu}$, e sia θ_2 l'unico angolo in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ tale che $\tan\theta_2 = -\dfrac{\lambda}{\mu}$. Se

$$X_i = \cos\theta_i \cdot v_1 + \sin\theta_i \cdot v_2$$

allora si verifica che $II(X_i, X_i) = 0$. I vettori unitari X_1, X_2 sono le direzioni indipendenti richieste. Nel secondo caso ($k_1(p) < 0$ e $k_2(p) > 0$) si procede in modo analogo.

d) Se p è un punto parabolico, non planare, allora solo una delle curvature principali è nulla; e possiamo supporre che sia la prima. Dunque

$$II(X, X) = k_2(p) \sin^2 \theta$$

con $k_2(p)$ non nullo. È evidente che l'unica direzione asintotica è quella corrispondente a $\theta = 0$, ovvero $X = v_1$. $\square$

Definizione 20. *Diremo che α è una curva asintotica di Σ se $\alpha'(t)$ è una direzione asintotica per ogni t.*

6.3 Curvatura normale

Le curve asintotiche si caratterizzano mediante l'annullarsi della loro curvatura normale. Se $\alpha(s)$ è una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea, ricordiamo la decomposizione del vettore accelerazione:

$$\alpha''(s) = \alpha''(s)^T + \langle \alpha''(s), N_\Sigma \rangle N_\Sigma,$$

dove N_Σ è il versore normale calcolato in $\alpha(s)$.

Definizione 21. *La componente normale dell'accelerazione:*

$$k_n(s) \doteq \langle \alpha''(s), N_\Sigma(\alpha(s)) \rangle$$

è detta curvatura normale *di α in s.*

Derivando l'identità $\langle \alpha'(s), N_\Sigma(\alpha(s)) \rangle = 0$ e ricordando che, per definizione di derivata direzionale :

$$\frac{d}{ds} N_\Sigma(\alpha(s)) = \nabla_{\alpha'(s)} N_\Sigma = -W(\alpha'(s)),$$

otteniamo $\langle \alpha''(s), N_\Sigma(\alpha(s)) \rangle = \langle \alpha'(s), W(\alpha'(s)) \rangle = II(\alpha'(s), \alpha'(s))$ dunque :

$$k_n(s) = II(\alpha'(s), \alpha'(s)). \tag{13}$$

Abbiamo la seguente proposizione.

Proposizione 22. *Le seguenti affermazioni sono equivalenti.*

a) *La curvatura normale di α è identicamente nulla.*

b) *L'accelerazione di α è un vettore sempre tangente alla superficie.*

c) *α è una curva asintotica di Σ.*

Dimostrazione. L'equivalenza tra a) e b) è immediata; l'equivalenza tra b) e c) segue immediatamente dall'espressione (13). $\square$

Riassumiamo i fatti principali riguardo alla curvatura geodetica e alla curvatura normale.

Proposizione 23. *Sia $\alpha(s)$ una curva di Σ parametrizzata dall'ascissa curvilinea, con curvatura geodetica k_g e curvatura normale k_n. Allora:*

a) *k_g è identicamente nulla se e solo se α è una geodetica.*

b) *k_n è identicamente nulla se e solo se α è una curva asintotica.*

c) *Se $k(s)$ è la curvatura di α in quanto curva dello spazio, allora si ha:*

$$k(s)^2 = k_g(s)^2 + k_n(s)^2.$$

d) *Se α è una curva di Σ parametrizzata da t (non necessariamente l'ascissa curvilinea) allora si ha:*

$$k_g(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^3} \cdot \det\Big(\alpha'(t), \alpha''(t), N_\Sigma(\alpha(t))\Big)$$
$$k_n(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^2} \cdot \langle \alpha''(t), N_\Sigma(\alpha(t)) \rangle$$

6.4 Curvatura geodetica e curvatura normale dei paralleli

Calcoliamo ora curvatura geodetica e curvatura normale dei paralleli della superficie di rotazione ottenuta ruotando la curva del piano xz:

$$\gamma(v) = \begin{pmatrix} \phi(v) \\ 0 \\ \psi(v) \end{pmatrix}$$

intorno all'asse z. La parametrizzazione è

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \phi(v)\cos u \\ \phi(v)\sin u \\ \psi(v) \end{pmatrix}$$

Il parallelo $v = v_0$ ha curva preimmagine $\begin{cases} u = t \\ v = v_0 \end{cases}$ dunque

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \phi(v_0)\cos t \\ \phi(v_0)\sin t \\ \psi(v_0) \end{pmatrix},$$

inoltre

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\phi(v_0)\sin t \\ \phi(v_0)\cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -\phi(v_0)\cos t \\ -\phi(v_0)\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che

$$N_\Sigma(u,v) = \frac{1}{\sqrt{\phi'(v)^2+\psi'(v)^2}}\begin{pmatrix}\psi'(v)\cos u\\ \psi'(v)\sin u\\ -\phi'(v)\end{pmatrix},$$

dunque

$$N_\Sigma(\alpha(t)) = \frac{1}{\sqrt{\phi'(v_0)^2+\psi'(v_0)^2}}\begin{pmatrix}\psi'(v_0)\cos t\\ \psi'(v_0)\sin t\\ -\phi'(v_0)\end{pmatrix}.$$

Di conseguenza

$$k_g(t) = \frac{1}{|\alpha'|^3}\det(\alpha',\alpha'',N) = -\frac{\phi'(v_0)}{\phi(v_0)\sqrt{\phi'(v_0)^2+\psi'(v_0)^2}},$$

e

$$k_n(t) = \langle\alpha'',N\rangle = -\frac{\psi'(v_0)}{\phi(v_0)\sqrt{\phi'(v_0)^2+\psi'(v_0)^2}}.$$

Notiamo che, effettivamente:

$$k_g^2+k_n^2 = \frac{1}{\phi(v_0)^2} = k^2$$

poichè il parallelo $v=v_0$ è una circonferenza di raggio $\phi(v_0)$, e di conseguenza ha curvatura costante $k = 1/\phi(v_0)$.

7 Tubo intorno a una curva dello spazio

Sia $\alpha : [0,L] \to \mathbf{R}^3$ una curva dello spazio parametrizzata dall'ascissa curvilinea, e che supporremo biregolare. Dunque in ogni punto $u \in [0,L]$ abbiamo il triedro di Frenet $(T(u), N(u), B(u))$ (rispettivamente: versore tangente, normale, binormale).
Fissiamo $r > 0$. Per ogni $u \in [0,L]$ consideriamo la circonferenza di raggio r nel piano normale di α in u (per definizione, il piano passante per $\alpha(u)$ ortogonale a $T(u)$). Tale circonferenza, denotata Γ_u, si parametrizza come segue:

$$\gamma(v) = \alpha(u) + r\cos vN(u) + r\sin vB(u)$$

dove $v \in [0,2\pi]$. Al variare di $u \in [0,L]$ la circonferenza Γ_u genera un insieme di punti dello spazio denotato Σ_r, e parametrizzato dalla mappa

$$f(u,v) = \alpha(u) + r\cos vN(u) + r\sin vB(u), \tag{14}$$

definita su $[0,L]\times[0,2\pi]$.

• Σ_r è anche detta *tubo di raggio r intorno alla curva α.* (Non richiederemo che f sia iniettiva su $[0,L)$; in particolare un tubo puo' avere autointersezioni).

Vogliamo studiare i seguenti problemi:
a) Per quali valori di r si ha che Σ_r è una superficie regolare ?
b) Qual è la curvatura gaussiana di tale superficie ?
Ora, poichè $\alpha'(u) = T(u)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = T(u) + r\cos v N'(u) + r \sin v B'(u) \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = -r\sin v N(u) + r\cos v B(u) \end{cases}$$

Dalle formule di Frenet sappiamo che

$$T' = kN,\ N' = -(kT + \tau B),\ B' = \tau N$$

e otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \Big(1 - rk(u)\cos v\Big)T(u) + r\tau(u)\sin v N(u) - r\tau(u)\cos v B(u) \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = -r\sin v N(u) + r\cos v B(u). \end{cases} \tag{15}$$

Usando le identita'

$$T \wedge N = B,\ N \wedge B = T,\ B \wedge T = N,$$

otteniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = -r(1 - rk(u)\cos v)\Big(\cos v \cdot N(u) + \sin v \cdot B(u)\Big).$$

Ne segue che

$$|\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}| = r|1 - rk(u)\cos v| \doteq r|\theta(u,v)| \tag{16}$$

dove si e' posto:

$$\theta(u,v) = 1 - rk(u)\cos v.$$

Quindi Σ_r è sicuramente regolare in ogni punto (u,v) tale che $\theta(u,v) \neq 0$. Ora si vede che se r è molto piccolo $\theta(u,v)$ sarà positiva ovunque; precisamente, definiamo

$$k_{MAX} = \max\{k(u) : u \in [0,L]\}$$

e supponiamo che $r < \frac{1}{k_{MAX}}$, cosicché $1 - rk_{MAX} > 0$. Allora, poichè $k(u)\cos v \leq k(u)|\cos v| \leq k(u) \leq k_{MAX}$, si avrà:

$$\begin{aligned} \theta(u,v) &= 1 - rk(u)\cos v \\ &\geq 1 - rk_{MAX} \\ &> 0 \end{aligned}$$

per ogni (u,v) e il tubo è regolare ovunque. Riassumiamo i risultati nella seguente proposizione.

Proposizione 24. *Sia Σ_r il tubo di raggio r intorno alla curva α. Posto:*

$$\theta(u,v) = 1 - rk(u)\cos v$$

si ha che Σ_r è una superficie regolare in tutti i punti (u,v) tali che $\theta(u,v) \neq 0$. In particolare, se

$$r < \frac{1}{k_{MAX}} \tag{17}$$

allora $\theta(u,v) > 0$ per ogni (u,v) e quindi Σ_r è regolare ovunque.

7.1 Esempi

1. Se $\alpha(u)$ è una circonferenza di raggio a nel piano xy allora $k(u) = k_{MAX} = \frac{1}{a}$ e la condizione (17) è:

$$r < a.$$

In tal caso, il tubo di raggio r intorno ad a sara' un toro di raggi $a, a-r$ (superficie regolare). Se $r = a$ perdiamo la regolarità. Se $r > a$ il tubo sara' una superficie regolare, ma avra' autointersezioni.

2. Sia ora $\alpha(u)$ l'elica circolare

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

Un calcolo mostra che $k(u) = k_{MAX} = \frac{1}{2}$. Dunque per $r < 2$ il tubo Σ_r (che somiglia a una molla) è regolare.

7.2 Area e curvatura

D'ora in poi assumeremo la validità di (17), quindi Σ_r è regolare in ogni punto e si ha sempre $\theta > 0$.
Veniamo ora all'area di Σ_r. Per ogni superficie parametrizzata $f = f(u,v)$ con prima forma fondamentale g si ha sempre:

$$\det g = |\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v}|^2;$$

infatti, per ogni coppia di vettori $\xi, \eta \in \mathbf{R}^3$ si ha:

$$|\xi \wedge \eta|^2 = |\xi|^2|\eta|^2 - \langle \xi, \eta\rangle^2 = \det \begin{pmatrix} \langle \xi, \xi\rangle & \langle \xi, \eta\rangle \\ \langle \xi, \eta\rangle & \langle \eta, \eta\rangle \end{pmatrix}.$$

Dalla (16) abbiamo

$$\sqrt{\det g} = r\Big(1 - rk(u)\cos v\Big).$$

e l'area totale di Σ_r è dunque data da:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^L r\Big(1 - rk(u)\cos v\Big)\,du\,dv.$$

Un rapido calcolo mostra che l'integrale vale sempre $2\pi Lr$, e quindi *non* dipende dalla curvatura.

Proposizione 25. *Sia Σ_r il tubo di raggio r intorno a un arco di curva di lunghezza L. Allora*

$$\text{Area}(\Sigma_r) = 2\pi Lr.$$

Esempio. Il toro di raggi $a \geq b$ è l'intorno tubolare di raggio $r = b$ di una circonferenza di raggio a. Dunque $L = 2\pi a$ e l'area vale $4\pi^2 ab$, come precedentemente calcolato.

Veniamo ora alla prima forma fondamentale. Ponendo $\theta(u,v) = 1 - rk(u)\cos v$ e omettendo per brevita' la dipendenza esplicita da u, v, la (15) diventa:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = \theta T + r\tau \sin vN - r\tau\cos vB \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = -r\sin vN + r\cos vB. \end{cases} \tag{18}$$

e otteniamo:

$$g_{11} = \langle \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial u}\rangle = \theta^2 + r^2\tau^2,$$

dove $\tau = \tau(u)$ è la torsione di α. Procedendo in modo analogo, otteniamo:

$$g = \begin{pmatrix} \theta^2 + r^2\tau^2 & -r^2\tau \\ -r^2\tau & r^2 \end{pmatrix}$$

e si ha:

$$\det g = r^2\theta^2.$$

Il versore normale della superficie, che indicheremo con N_Σ (per distinguerlo dal versore normale alla curva, che è denotato N) è il vettore normalizzato di $E_1 \wedge E_2$, dunque

$$N_\Sigma = \cos vN(u) + \sin vB(u)$$

Vediamo la seconda forma fondamentale. Derivando rispetto a u la prima relazione in (18) e usando le formule di Frenet, otteniamo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \Big(\frac{\partial\theta}{\partial u} - rk\tau\sin v\Big)T + (k\theta + r\tau'\sin v - r\tau^2\cos v)N + (-r\tau'\cos v - r\tau^2\sin v)B.$$

Dunque:

$$l_{11} = \langle\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, N_\Sigma\rangle = k\theta\cos v - r\tau^2.$$

Si ha poi:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = rk \sin v \cdot T + r\tau \cos v \cdot N + r\tau \sin v \cdot B$$

dunque:

$$l_{12} = r\tau.$$

Infine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = -r \cos v N - r \sin v B, \quad \text{dunque} \quad l_{22} = -r.$$

La seconda forma fondamentale è:

$$l = \begin{pmatrix} k\theta \cos v - r\tau^2 & r\tau \\ r\tau & -r \end{pmatrix}$$

e si ha:

$$\det l = -rk\theta \cos v.$$

Concludiamo che:

Proposizione 26. *La curvatura gaussiana del tubo di raggio r intorno ad α è data da:*

$$K = \frac{\det l}{\det g} = -\frac{k \cos v}{r(1 - rk \cos v)}.$$

Veniamo alle curvature principali. La matrice dell'operatore di Weingarten è:

$$w = \begin{pmatrix} \frac{k \cos v}{\theta} & 0 \\ \frac{k\tau \cos v}{\theta} + \frac{\tau}{r} & -\frac{1}{r} \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice w è triangolare superiore, le curvature principali sono:

$$k_1 = \frac{k \cos v}{\theta}, \quad k_2 = -\frac{1}{r}.$$

Notiamo in effetti che

$$K = k_1 k_2 = -\frac{k \cos v}{r\theta}$$

e che la curvatura media è:

$$H = \frac{1}{2}\Big(\frac{k \cos v}{\theta} - \frac{1}{r}\Big).$$

Infine, osserviamo che le curvature possono essere espresse in termini della funzione $\theta(u, v) = 1 - rk(u) \cos v$ come segue:

$$K = -\frac{1 - \theta}{r^2\theta}, \quad H = \frac{1 - 2\theta}{2r\theta}.$$

8 Superfici parallele

Sia Σ una superficie dello spazio parametrizzata dalla mappa regolare $f = f(u, v)$ definita su $\Omega \subseteq \mathbf{R}^2$, e sia $N = N(u, v)$ il versore normale della parametrizzazione. Quindi $\Sigma = f(\Omega)$. Fissato $r \in \mathbf{R}$, consideriamo la mappa $f^{(r)} : \Omega \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$f^{(r)}(u, v) = f(u, v) + rN(u, v) \tag{19}$$

- La superficie $\Sigma_r = f^{(r)}(\Omega)$ è detta *superficie parallela a distanza r da* Σ. È chiaro che $f^{(0)} = f$.

Esempio. Si verifica facilmente che, se Σ è la sfera di raggio R (parametrizzata nel modo usuale), e se N è il versore normale, orientato verso l'esterno della sfera, allora Σ_r è la sfera di raggio $R + r$. Se $r > -R$ allora Σ_r sara' regolare, mentre se $r = -R$ la superficie parallela degenera in un punto, e quindi non è regolare.

Vedremo che se Ω è chiuso e limitato, e se $|r| \leq \epsilon$ con ϵ sufficientemente piccolo, allora la parametrizzazione (19) di Σ_r è regolare, e daremo un'espressione di ϵ in funzione delle curvature principali di Σ.

Poniamo

$$E_1^{(r)} = \frac{\partial f^{(r)}}{\partial u}, \quad E_2^{(r)} = \frac{\partial f^{(r)}}{\partial v}$$

e siano, come al solito:

$$E_1 = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad E_2 = \frac{\partial f}{\partial v}.$$

La mappa $f^{(r)}$ è regolare se e solo se $|E_1^{(r)} \wedge E_2^{(r)}| > 0$. Si ha:

$$\begin{cases} E_1^{(r)} = E_1 + r\dfrac{\partial N}{\partial u} \\ E_2^{(r)} = E_2 + r\dfrac{\partial N}{\partial v}. \end{cases}$$

Sia W l'operatore di Weingarten, che agisce su ciascun piano tangente a Σ: per definizione, $W(X) = -\nabla_X N$. Se $w = (w_{ij})$ è la matrice associata a W rispetto alla base (E_1, E_2) del piano tangente, si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial N}{\partial u} = \nabla_{E_1} N = -W(E_1) = -w_{11}E_1 - w_{21}E_2 \\ \dfrac{\partial N}{\partial v} = \nabla_{E_2} N = -W(E_2) = -w_{12}E_1 - w_{22}E_2 \end{cases}$$

e otteniamo:

$$\begin{aligned} E_1^{(r)} \wedge E_2^{(r)} &= E_1 \wedge E_2 - r(w_{11} + w_{22})E_1 \wedge E_2 + r^2(w_{11}w_{22} - w_{12}^2)E_1 \wedge E_2 \\ &= (1 - r \operatorname{tr} w + r^2 \det w)E_1 \wedge E_2 \end{aligned} \tag{20}$$

Se k_1 e k_2 sono le curvature principali di Σ (ovvero, gli autovalori di w) si ha $\operatorname{tr} w = k_1 + k_2$ e $\det w = k_1 k_2$. Dunque:

$$1 - r \operatorname{tr} w + r^2 \det w = (1 - rk_1)(1 - rk_2)$$

e arriviamo alla seguente espressione:

$$E_1^{(r)} \wedge E_2^{(r)} = (1 - rk_1)(1 - rk_2) E_1 \wedge E_2.$$

Ricordiamo che k_1, k_2 sono funzioni di u, v e introduciamo la funzione:

$$\Theta = (1 - rk_1)(1 - rk_2).$$

Allora possiamo scrivere

$$|E_1^{(r)} \wedge E_2^{(r)}| = |\Theta||E_1 \wedge E_2|.$$

Dunque:

- *Σ_r è singolare in (u, v) solo se $\Theta(u, v) = 0$, ovvero solo se $1 - rk_1(u, v) = 0$ oppure $1 - rk_2(u, v) = 0$.*

Ora supponiamo che

$$a_i \doteq \sup_{(u,v) \in \Omega} |k_i(u, v)|, \quad i = 1, 2 \tag{21}$$

siano costanti finite: $a_1 < +\infty, a_2 < +\infty$ (questo sicuramente accade se Ω è chiuso e limitato, per la continuità delle curvature principali in quanto funzioni definite su Ω). Poniamo:

$$\epsilon = \min\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}\} \tag{22}$$

con la convenzione che $\dfrac{1}{a_i} = +\infty$ se $a_i = 0$: si ha in ogni caso $\epsilon a_i \leq 1$ per $i = 1, 2$. Se $|r| < \epsilon$ si ha:

$$rk_i(u, v) \leq |r||k_i(u, v)| < \epsilon a_i \leq 1, \quad i = 1, 2$$

ovvero $1 - rk_i(u, v) > 0$ per $i = 1, 2$ e per ogni $(u, v) \in \Omega$. Dunque $\Theta > 0$ su Ω e Σ_r è regolare ovunque.
Riassumiamo le conclusioni nel seguente teorema.

Teorema 27. *Sia Σ_r la superficie parallela a distanza r da Σ, parametrizzata come in* (19)*. Siano $k_1(u, v), k_2(u, v)$ le curvature principali di Σ in $(u, v) \in \Omega$, e poniamo*

$$\Theta(u, v) = \Big(1 - rk_1(u, v)\Big)\Big(1 - rk_2(u, v)\Big).$$

a) Se $\Theta(u, v) \neq 0$ allora Σ_r è regolare in (u, v).

b) Supponiamo che Ω sia chiuso e limitato, e siano a_1, a_2, ϵ le costanti definite in (21) *e* (22)*. Se $|r| < \epsilon$ allora $\Theta > 0$ e Σ_r è regolare in ogni punto di Ω.*

9 Geodetiche e lunghezza minima

È ben noto che, nel piano, un segmento di retta realizza il cammino di lunghezza minima tra i suoi estremi; inoltre per due punti distinti del piano passa una e una sola curva con tale proprietà (precisamente, il segmento di retta che li unisce). In questa sezione studieremo l'analoga proprietà sulle superfici.

In primo luogo dimostreremo che, se una curva minimizza il cammino tra due punti, allora essa è necessariamente una geodetica. Ora sulla sfera (e anche su un cilindro) ci sono coppie di punti per cui passano almeno due geodetiche distinte. Questa ambiguità però non sussiste a livello locale. Infatti, ogni punto p ammette un intorno U con la seguente proprietà: due punti qualunque di U si possono congiungere con un'unica geodetica interamente contenuta in U, che minimizza il cammino tra di essi. In conclusione, almeno localmente, le geodetiche generalizzano l'analoga proprietà delle rette del piano.

9.1 Una condizione necessaria

Sia $f : \Omega \to \Sigma$ una parametrizzazione di una superficie regolare, e siano $p, q \in \Sigma$.

- In questa sezione supporremo che Ω sia un dominio *aperto* del piano.

Definizione 28. *Dati due punti $p, q \in \Sigma$, e data una curva γ di Σ che congiunge p e q, diremo che γ* minimizza il cammino *(da p a q) se la lunghezza di γ è minore o uguale della lunghezza di qualunque altra curva (di Σ) che congiunge p con q.*

Teorema 29. *Sia $\gamma : [0, L] \to \Sigma$ un curva che congiunge p con q, parametrizzata dall'ascissa curvilinea s, e supponiamo che γ minimizzi il cammino da p a q. Allora, γ è una geodetica.*

Per la dimostrazione, supponiamo che $\gamma(0) = p, \gamma(L) = q$. Consideriamo una qualunque *variazione a un parametro di γ*. Questa è un'applicazione (differenziabile)

$$\Gamma : [-\epsilon, \epsilon] \times [0, L] \to \Sigma \subseteq \mathbf{R}^3$$

tale che:

$$\begin{cases} \Gamma(0, s) = \gamma(s) \quad \text{per ogni} \quad s \\ \Gamma(t, 0) = p \quad \text{per ogni} \quad t \\ \Gamma(t, L) = q \quad \text{per ogni} \quad t \end{cases}$$

Se poniamo, per ogni t fissato:

$$\gamma_t(s) = \Gamma(t, s),$$

vediamo allora che $\gamma_0 = \gamma$, e che $\gamma_t : [0, L] \to \Sigma$ è una curva "vicina a γ" che congiunge p con q. D'altra parte, per ogni s fissato, considerata la curva

$$\tilde{\gamma}_s : [-\epsilon, \epsilon] \to \Sigma, \quad \tilde{\gamma}_s(t) = \Gamma(t, s)$$

il suo vettore velocita' in $t = 0$, cioè:

$$\tilde{\gamma}_s'(0) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(0, s) \doteq \xi(s)$$

è un campo di vettori sulla curva γ, che chiameremo *campo di vettori della variazione a un parametro* Γ. Poichè $\tilde{\gamma}_s$ è una curva di Σ, il campo $\xi(s)$ è ovunque tangente a Σ.

Non è difficile dimostrare che, dato comunque un campo di vettori $\xi(s)$ su γ, questo è il campo di vettori di una opportuna variazione a un parametro di γ. Inoltre, poichè $t \mapsto \Gamma(t, 0)$ e $t \mapsto \Gamma(t, L)$ sono curve costanti, allora:

$$\xi(0) = \xi(L) = 0. \tag{23}$$

Consideriamo la funzione di t data da:

$$\Phi(t) = L(\gamma_t) = \int_0^L |\gamma_t'(s)| \, ds$$

che misura la lunghezza di γ_t da p a q. Poichè per ipotesi $L(\gamma) \leq L(\gamma_t)$ per ogni t, risulterà che $t = 0$ è un punto critico di Φ, ovvero:

$$\Phi'(0) = 0.$$

Lemma 30. *Sia $\gamma_t, t \in [-\epsilon, \epsilon]$, una variazione a un parametro di γ, con campo di vettori associato $\xi(s)$. Allora*

$$\Phi'(0) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \int_0^L |\gamma_t'(s)| \, ds = -\int_0^L \langle \xi(s), \alpha''(s)^T \rangle \, ds.$$

Dimostreremo il lemma piu' in avanti. Ora dimostriamo il teorema. Se γ minimizza il cammino tra p e q allora dovra' risultare $\Phi'(0) = 0$ per ogni variazione a un parametro di γ. Dunque

$$\int_0^L \langle \xi(s), \alpha''(s)^T \rangle \, ds = 0$$

per ogni scelta del campo di vettori $\xi(s)$ su γ. Questo avviene solo se

$$\alpha''(s)^T = 0$$

per ogni s, dunque solo se $\gamma(s)$ è una geodetica.

Ora dimostriamo il lemma. Osserviamo che $\gamma_t'(s) = \dfrac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, s)$. Dunque

$$\Phi(t) = \int_0^L \sqrt{\langle \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \frac{\partial \Gamma}{\partial s} \rangle} \, ds$$

Quindi

$$\begin{aligned}\Phi'(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^L \sqrt{\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, \frac{\partial\Gamma}{\partial s}\rangle}\, ds \\ &= \int_0^L \frac{d}{dt}\sqrt{\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, \frac{\partial\Gamma}{\partial s}\rangle}\, ds \\ &= \int_0^L \frac{1}{2\sqrt{\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, \frac{\partial\Gamma}{\partial s}\rangle}} \frac{d}{dt}\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, \frac{\partial\Gamma}{\partial s}\rangle\, ds\end{aligned}$$

Ora:

$$\frac{d}{dt}\langle \frac{\partial\Gamma}{\partial s}, \frac{\partial\Gamma}{\partial s}\rangle = 2\langle \frac{\partial^2\Gamma}{\partial t\partial s}, \frac{\partial\Gamma}{\partial s}\rangle = 2\langle \frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\partial t}, \frac{\partial\Gamma}{\partial s}\rangle.$$

Ma, per $t = 0$:

$$\frac{\partial^2\Gamma}{\partial s\partial t}(0, s) = \frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial\Gamma}{\partial t}(0, s) = \nabla_{\gamma'(s)}\xi = \xi'(s) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(0, s) = \gamma'(s).$$

Poiché $|\gamma'(s)| = 1$ concludiamo che

$$\Phi'(0) = \int_0^L \langle \xi'(s), \gamma'(s)\rangle\, ds.$$

Ora

$$\frac{d}{ds}\langle \xi(s), \gamma'(s)\rangle = \langle \xi'(s), \gamma'(s)\rangle + \langle \xi(s), \gamma''(s)\rangle;$$

poiché

$$\int_0^L \frac{d}{ds}\langle \xi(s), \gamma'(s)\rangle\, ds = \xi(L)\gamma'(L) - \xi(0)\gamma'(0) = 0,$$

vediamo che $\int_0^L \langle \xi'(s), \gamma'(s)\rangle\, ds = -\int_0^L \langle \xi(s), \gamma''(s)\rangle\, ds$. Ricordando che $\xi(s)$ è tangente alla superficie, abbiamo in ogni punto $\langle \xi(s), \gamma''(s)\rangle = \langle \xi(s), \gamma''(s)^T\rangle$ dunque in conclusione

$$\Phi'(0) = -\int_0^L \langle \xi(s), \gamma''(s)^T\rangle\, ds.$$

e il lemma è dimostrato.

10 Mappa esponenziale

Sia Σ una superficie parametrizzata regolare. Abbiamo visto in precedenza che, dato un punto $p \in \Sigma$, esiste $\delta_p > 0$ (a priori dipendente da p) con la seguente proprietà. Per ogni vettore $\xi \in T_p\Sigma$ di modulo unitario, esiste un'unica geodetica $\gamma_\xi : [0, \delta_p] \to \Sigma$ tale che

$$\gamma_\xi(0) = p, \quad \gamma'_\xi(0) = \xi. \tag{24}$$

Vale a dire: esiste un'unica geodetica che parte da p e ha direzione iniziale ξ. Abbiamo già dimostrato che una geodetica ha vettore velocità di norma costante; dunque γ_ξ è parametrizzata dall'ascissa curvilinea.

Ora consideriamo la seguente costruzione. Dato un vettore tangente $X \in T_p\Sigma$, sia $r = |X|$ e consideriamo il versore di X, quindi il vettore unitario

$$\xi = \frac{1}{r}X.$$

Consideriamo la geodetica γ_ξ che verifica la (24) e seguiamola fino al punto $\gamma_\xi(r)$: per definizione, questo punto è detto *esponenziale, in p, del vettore* X e poniamo:

$$\exp_p X = \gamma_\xi(r).$$

Definizione 31. *Per quanto detto in precedenza, otteniamo un'applicazione*

$$\exp_p : B_{\delta_p}(O) \to \Sigma,$$

detta, appunto, mappa esponenziale *in p.*

È chiaro dalla definizione che, se $|\xi| = 1$, allora la curva $\alpha(r) = \exp_p(r\xi)$ è l'unica geodetica tale che $\alpha(0) = p, \alpha'(0) = \xi$. Inoltre $\exp_p$ mappa una semiretta uscente dall'origine (di versore ξ), in una geodetica radiale uscente da p (precisamente, con direzione iniziale ξ).

Del teorema seguente, molto importante, non daremo dimostrazione.

Teorema 32. *Per ogni $p \in \Sigma$ esiste $\epsilon_p > 0$ con la seguente proprietà: per ogni $\epsilon < \epsilon_p$ la mappa esponenziale* $\exp_p : B_\epsilon(O) \to \Sigma$ *è iniettiva e regolare.*

Ora, se $V_\epsilon(p)$ denota l'immagine di $\exp_p$, se cioè:

$$V_\epsilon(p) = \exp_p(B_\epsilon(O))$$

allora $\exp_p : B_\epsilon(O) \to V_\epsilon(p)$ è biettiva. Dunque $\exp_p$ è una parametrizzazione regolare della porzione di superficie $V_\epsilon(p) \subseteq \Sigma$.

- $V_\epsilon(p)$ è un intorno di p in Σ, detto *disco geodetico di centro p e raggio ϵ.*

Dire che $\exp_p$ è iniettivo equivale a dire che, dato un punto $q \in V_\epsilon(p)$ esiste un'unica geodetica che congiunge p e q, interamente contenuta in $V_\epsilon(p)$.

Introduciamo coordinate polari (r, θ) in $T_p\Sigma$, con origine in O, e indichiamo con $h = \exp_p$. Dunque h è una parametrizzazione regolare dell'intorno V_ϵ di p.

- In questa parametrizzazione, le linee coordinate $r = c$ sono curve regolari chiuse di Σ, dette *circonferenze geodetiche di centro p e raggio c.*

Le linee coordinate $\theta = c$ sono archi di geodetiche uscenti da p. Si dimostra che le circonferenze geodetiche incontrano i raggi geodetici uscenti da p ortogonalmente. Ne segue che la prima forma fondamentale della parametrizzazione esponenziale h è, nelle coordinate (r, θ):

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g_{22}(r, \theta) \end{pmatrix}$$

dove $g_{22}(r, \theta)$ è una funzione differenziabile positiva. Questa espressione della prima forma fondamentale ci permettera' di dimostrare il seguente teorema.

Teorema 33. *Sia $p \in \Sigma$ e $\epsilon < \epsilon_p$ come nel teorema precedente. Un qualunque punto $q \in V_\epsilon(p)$ si può congiungere a p con un'unica geodetica interamente contenuta in $V_\epsilon(p)$, che minimizza il cammino da p a q.*

Quindi, fissato un punto $p \in \Sigma$, e fissata una qualunque geodetica $\gamma(t)$ uscente da p, tale geodetica minimizza la distanza tra p e $\gamma(t)$ se t è sufficientemente piccolo, vale a dire se $t \in [0, \epsilon]$ con ϵ sufficientemente piccolo. In questo senso le geodetiche minimizzano il cammino solo *localmente*; per tempi t maggiori la geodetica può ancora esistere, ma potrebbe non avere piu' tale proprietà minimizzante.

Dimostrazione. Sappiamo che la mappa esponenziale in p è biettiva su V_ϵ, dunque esiste un'unico vettore $X \in B_\epsilon(O)$ tale che $q = \exp_p X$. Sia $|X| = r_0$ e consideriamo il versore

$$\xi = \frac{1}{r_0} X.$$

La geodetica $\gamma \doteq \gamma_\xi$ è parametrizzata dall'ascissa curvilinea, ha lunghezza r_0 ed è tale che

$$\gamma(0) = p, \gamma(r_0) = q.$$

Per dimostrare che γ minimizza il cammino da p a q è sufficiente dimostrare che, data una qualunque curva $\alpha : [0, l] \to \Sigma$ tale che $\alpha(0) = p, \alpha(l) = q$ allora si ha

$$L(\alpha) \geq r_0,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\alpha = \gamma$. Ora si verifica che se α uscisse da V_ϵ avrebbe lunghezza maggiore di $\epsilon \geq r_0$. Dunque possiamo assumere che α è interamente contenuta in V_ϵ. In coordinate polari

$$\alpha(t) = h(r(t), \theta(t));$$

l'espressione della prima forma fondamentale mostra allora che

$$|\alpha'(t)|^2 = r'(t)^2 + g_{22}(r(t), \theta(t))\theta'(t)^2,$$

dunque, poichè $|r'(t)| \geq r'(t)$ e $\theta'(t)^2 \geq 0$:

$$|\alpha'(t)| \geq r'(t),$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\theta'(t) = 0$ per ogni t (infatti g_{22} è positivo). Dunque

$$L(\alpha) = \int_0^l |\alpha'(t)|\, dt \geq \int_0^l r'(t)\, dt = r(l) - r(0).$$

Poichè $r(0) = 0$ e $r(l) = r_0$ abbiamo dunque $L(\alpha) \geq r_0$; inoltre vale l'uguaglianza se e solo se $\theta(t) = \theta_0$ è costante, dunque se e solo se α è il raggio geodetico γ che congiunge p e q.

$\square$

10.1 Intorno convesso

Un ulteriore raffinamento degli argomenti usati in precedenza porta al seguente risultato, che non dimostreremo, e che prende il nome di *Teorema dell'intorno convesso.*

Teorema 34. *Per ogni $p \in \Sigma$ esiste $\tilde{\epsilon}_p > 0$ (si assume $\tilde{\epsilon}_p \leq \epsilon_p$) con la seguente proprietà. Per ogni $\epsilon < \tilde{\epsilon}_p$, e per ogni $q_1, q_2 \in V_\epsilon(p)$, esiste un'unica curva che minimizza il cammino da q_1 a q_2, e tale curva è una geodetica interamente contenuta in $V_\epsilon(p)$.*

In altre parole, dati $q_1, q_2 \in V_\epsilon$ esiste sempre una geodetica con punto iniziale q_1 e punto finale q_2. A meno di riparametrizzazioni, tale geodetica è unica; in particolare, esiste un'unica geodetica $\gamma = \gamma_{q_1,q_2} : [0, l] \to \Sigma$, parametrizzata dall'ascissa curvilinea, tale che $\gamma(0) = q_1, \gamma(l) = q_2$ (notare che l è la lunghezza di γ). Inoltre, γ minimizza il cammino.

- Un intorno $V_\epsilon(p)$ con la proprietà di cui al teorema precedente è detto *intorno convesso* di $p \in \Sigma$. Il teorema esprime il fatto che ogni punto di Σ ammette un intorno convesso.

10.2 Esempio : il piano

Se Σ è un piano e $p \in \Sigma$ allora $T_p\Sigma$ si identifica con $\mathbf{R}^2$; le geodetiche sono segmenti di rette parametrizzati proporzionalmente all'ascissa curvilinea e, fissato $X \in T_p\Sigma$, la geodetica γ_X uscente da p tale che $\gamma_X'(0) = X$ è semplicemente:

$$\gamma_X(t) = p + tX.$$

Ovviamente la geodetica γ_X è definita per ogni $t \in [0, \infty)$, quindi il δ_p precedentemente definito vale $\delta_p = +\infty$. La mappa esponenziale in p è data da,

$$\exp_p(r\xi) = p + r\xi$$

per ogni ξ di modulo unitario e per ogni $r \geq 0$. Poiché due rette uscenti da p si incontrano solo in p, vediamo che $\exp_p$ è *globalmente* iniettivo; siccome le rette del piano minimizzano la distanza tra due qualunque punti su di esse, possiamo prendere $\tilde{\epsilon}_p = \epsilon_p = +\infty$ in Teorema 32. Dunque le affermazioni del Teorema 32 valgono globalmente. È chiaro che la circonferenza geodetica di centro p e raggio r coincide con la usuale circonferenza del piano di centro l'origine e raggio r.

Esempio. Consideriamo ora la superficie Σ ottenuta rimuovendo un punto da un piano, ad esempio, rimuovendo l'origine dal piano $\mathbf{R}^2$:

$$\Sigma = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Come nel caso precedente, il piano tangente in un punto qualunque $p \in \Sigma$ si identifica con $\mathbf{R}^2$ e le geodetiche uscenti da un punto sono segmenti di rette con origine in p. Si vede che, se $p = (p_1, p_2)$ e se $X = -(p_1, p_2)$, allora la geodetica $\gamma_X(t) = p + tX$ esiste solo per $t \in [0, 1)$ (infatti, $\gamma_X(1) = (0,0) \notin \Sigma$). Dunque non tutte le geodetiche si possono estendere, e si vede che come δ_p possiamo prendere un qualunque $\delta_p < \sqrt{p_1^2 + p_2^2} = d(p, O)$. Come ϵ_p (vedi Teorema 32) possiamo prendere $\epsilon_p = \delta_p$ ma la mappa esponenziale non è globalmente definita su $T_p\Sigma$.

10.3 Esempio : la sfera

Sia Σ la sfera di raggio unitario e sia p un punto di Σ. Le geodetiche uscenti da p sono gli archi di cerchio massimo che si ottengono intersecando Σ con un piano contenente p e il centro della sfera.

Osserviamo innanzitutto che, se $p \in \Sigma$, allora il versore normale in p è semplicemente $N_\Sigma(p) = p$ oppure il suo opposto $N_\Sigma(p) = -p$ (per convenzione sceglieremo il primo). Dunque il piano tangente in p è:

$$T_p\Sigma = p^\perp,$$

ovvero, il complemento ortogonale, in $\mathbf{R}^3$, del vettore posizione p.

Lemma 35. *Se $\xi \in T_p\Sigma$ ha modulo unitario, la curva:*

$$\gamma_\xi(t) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot \xi,$$

è l'unica geodetica tale che $\gamma_\xi(0) = p, \gamma_\xi'(0) = \xi$.

Dimostrazione. Infatti, si verifica che

$$|\gamma_\xi'(t)| = 1$$

per ogni t dunque γ_ξ è effettivamente contenuta in Σ, ed è parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Un calcolo mostra che

$$\gamma_\xi''(t) = -\gamma_\xi(t) = -N_\Sigma(\gamma_\xi(t));$$

essendo γ_ξ'' parallela al versore normale, l'accelerazione tangenziale di γ_ξ è nulla, dunque γ_ξ è una geodetica. □

Si vede immediatamente che α_ξ parametrizza il cerchio massimo contenente p e ξ.

- La mappa esponenziale si esprime nel seguente modo. Se $|\xi| = 1$ allora

$$\exp_p(r\xi) = \cos r \cdot p + \sin r \cdot \xi.$$

La mappa esponenziale $\exp_p$ applica segmenti di retta uscenti dall'origine di $T_p\Sigma$ in archi di cerchio massimo di uguale lunghezza, uscenti da p.

Per concretezza, supponiamo che p sia il polo nord: $p = (0, 0, 1)$. Allora si vede che $\exp_p$ è iniettivo sul disco aperto di raggio π, e mappa la circonferenza di centro l'origine e raggio r in $T_p\Sigma$ sul parallelo $z = \cos r$ (vale a dire, la circonferenza intersezione di Σ con il piano $z = \cos r$). Le circonferenze geodetiche sono dunque i paralleli della sfera e la mappa

$$\exp_p : B_\pi(O) \to V_\pi(p) \doteq \Sigma \setminus (0, 0, -1)$$

è biiettiva. Notiamo che pero' $\exp_p$ mappa ogni vettore X di modulo π nel punto $-p = (0, 0, -1)$: di conseguenza, per $\epsilon > \pi$ l'esponenziale $\exp_p : B_\epsilon(O) \to \Sigma$ non è piu' iniettivo.

- Dunque nel Teorema 32, parte a), possiamo prendere $\epsilon_p = \pi$.
- Notiamo che una qualunque geodetica γ_ξ uscente da p con direzione iniziale data dal versore ξ minimizza il cammino da p a $\gamma(t)$ fino al punto opposto $\gamma_\xi(\pi) = -p$: oltre tale punto non è più minimizzante.

Infine, si verifica che le proprietà che definiscono un intorno convesso di p (vedi Teorema 32 b)) sono soddisfatte dall'emisfero nord:

$$V_{\frac{\pi}{2}}(p) = \Sigma \cap \{z > 0\}.$$

In conclusione, con riferimento alle costanti $\delta_p, \epsilon_p, \tilde{\epsilon}_p$ precedentemente introdotte, possiamo prendere, per la sfera di raggio unitario:

$$\delta_p = +\infty, \quad \epsilon_p = \pi, \quad \tilde{\epsilon}_p = \frac{\pi}{2}.$$

11 Esercizi

11.1 Esercizio

Determinare l'area della regione del paraboloide $z = x^2 + y^2$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = a$ dove $a > 0$. Ottenere il risultato parametrizzando il paraboloide in due modi diversi: come grafico di una funzione, e come superficie di rivoluzione.

11.2 Esercizio

a) Parametrizzare il cilindro circolare retto di raggio 1, ovvero la superficie di equazione $x^2 + y^2 = 1$.

b) Scrivere esplicitamente le equazioni delle geodetiche.

c) Verificare che le geodetiche del cilindro sono: le generatrici (rette parallele all'asse z), i paralleli, le eliche di raggio 1 e passo arbitrario.

11.3 Esercizio

È data la catenoide

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in [0, 2\pi) \times \mathbf{R}.$$

a) Scrivere la seconda forma fondamentale (utilizzare formule note).

b) Determinare le curve asintotiche di Σ passanti per il punto $p = (1,0,0)$ e verificare che, in p, esse si incontrano ortogonalmente.

b) Sia Σ una superficie minimale. Dimostrare che, se p è un punto iperbolico di Σ, allora le due direzioni asintotiche in p sono ortogonali tra loro. (Usare il teorema di Eulero).

11.4 Esercizio

È data la superficie Σ di equazione $z = x^2 - 3y^2$ e il suo punto $p = (0,0,0)$.

a) Determinare le direzioni principali e le curvature principali nel punto p.

b) Determinare le direzioni asintotiche in p.

c) Parametrizzare le due curve asintotiche passanti per p.

11.5 Esercizio

Sia Σ la sfera di centro l'origine e raggio 1, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

a) Parametrizzare la geodetica α uscente dal punto $p = \sqrt{3}(1,1,1)$ con velocità iniziale $\xi = \sqrt{2}(1,-1,0)$.

b) Determinare le intersezioni di α con l'equatore $z = 0$; per ogni punto q cosi' ottenuto, calcolare la lunghezza dell'arco geodetico α da p a q.

11.6 Esercizio

Si consideri l'ellissoide $F(x,y,z) = 0$ dove $F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$.

a) Si determini il vettore ∇F (che risulta parallelo al versore normale).

b) Si consideri la sezione piana α_c ottenuta intersecando Σ con il piano $z = c$. Parametrizzare tale curva, e stabilire per quali valori di c essa è una geodetica di Σ. Disegnare α_c.

c) Ripetere l'esercizio b) per ciascuna delle sezioni piane $x = c, y = c$.

11.7 Esercizio

Si consideri la superficie Σ (ellissoide):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

a) Verificare che le sezioni piane ottenute come intersezione dell'ellissoide con i piani coordinati $x=0, y=0, z=0$ sono tutte geodetiche (se parametrizzate dall'ascissa curvilinea).

b) Enunciare il Teorema di Clairaut per le geodetiche su una superficie di rotazione.

c) Sia $\gamma_1=\Sigma\cap\{z=0\}$ la geodetica ottenuta come intersezione di Σ con il piano xy. Sia $p=(a,0,0)$ un punto di γ_1, e sia α la geodetica di Σ uscente da p, orientata nel verso delle z crescenti, e che forma un angolo di $\pi/3$ con γ_1. Determinare il valore minimo che può assumere la distanza di $\alpha(t)$ dall'asse z, e inoltre il valore massimo che puo' assumere la quota di $\alpha(t)$ (ovvero, la sua terza coordinata).

11.8 Esercizio

Si consideri la superficie ottenuta ruotando la curva $x=\dfrac{1}{z}$ del piano xz intorno all'asse z (si assuma $z>0$).

a) Parametrizzare Σ, inoltre determinare il versore normale e il piano tangente a Σ nel suo punto $(1,0,1)$. Dato $a>0$, scrivere l'integrale che esprime l'area della regione $\Sigma_a\subseteq\Sigma$ definita dalle disuguaglianze $a<z\leq 1$, e stabilire se Σ_a ha area finita oppure no quando $a\to 0$.

b) Si consideri il parallelo $\Gamma_c: z=c$, dove $c>0$ è costante. Determinare gli eventuali valori di c per i quali Γ_c è una geodetica di Σ. Determinare inoltre i valori che puo' assumere il valore assoluto della curvatura geodetica di Γ_c.

c) Sia ora α la geodetica uscente da $p\in\Gamma_1$, diretta nel verso delle z crescenti, che forma con il parallelo Γ_1 un angolo di $\frac{\pi}{6}$ radianti. Calcolare la quota massima raggiunta da α.

11.9 Esercizio

Si consideri la superficie di rotazione Σ parametrizzata nel modo seguente:

$$f(u,v)=\begin{pmatrix}\cosh v\cos u\\ \cosh v\sin u\\ \sinh v\end{pmatrix},\quad (u,v)\in[0,2\pi]\times(-\infty,\infty),$$

e si denoti con Γ il parallelo definito dall'equazione $v=0$.

a) Determinare prima e seconda forma fondamentale e curvatura gaussiana nei punti di Γ (attenzione, la curva profilo non è parametrizzata dall'ascissa curvilinea).

b) Determinare l'equazione cartesiana di Σ, e verificare che Σ è una quadrica; inoltre, dimostrare che per il punto $p = (1, 0, 0) \in \Sigma$ passano due rette distinte interamente contenute in Σ.

c) Sia $\gamma : [0, \infty) \to \Sigma$ una geodetica di Σ tale che $\gamma(0) = (1, 0, 0) \in \Gamma$. Supponiamo che la velocità iniziale $\gamma'(0)$ formi con Γ un angolo acuto positivo $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, e che $\gamma'(0)$ sia orientato nel verso delle z crescenti. Sia $z(t)$ la terza coordinata di $\gamma(t)$: stabilire se $z(t)$ raggiunge un valore massimo, ovvero se esiste t_0 tale che $z(t) \leq z(t_0)$ per ogni t.

11.10 Esercizio

Sia α la circonferenza del piano xz, di centro $(a, 0, 0)$ e raggio b, parametrizzata come segue:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a + b\cos t \\ 0 \\ b\sin t \end{pmatrix} \qquad t \in [-\pi, \pi].$$

e sia Σ il toro ottenuto ruotando α intorno all'asse z. Si assuma $a > b$.

a) Parametrizzare Σ con coordinate t, θ, e sia Γ_c il parallelo $t = c$.

b) Calcolare la curvatura geodetica di Γ_c e trovare i valori di c per i quali Γ_c è una geodetica.

c) Calcolare la curvatura normale di Γ_c e trovare i valori di c per i quali Γ_c è una curva asintotica.

d) Si consideri la geodetica γ uscente dal punto $P_1 = (a+b, 0, 0)$ che forma con il parallelo per P_1 un angolo iniziale di ϕ_0 radianti. Determinare il valore minimo $T > 0$ tale che, se $\cos\phi_0 \geq T$, allora γ è sempre contenuta nella regione dove $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

11.11 Esercizio

Si consideri la curva del piano xz (detta *trattrice*) parametrizzata come segue:

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} \phi(s) \\ 0 \\ \psi(s) \end{pmatrix}$$

dove

$$\phi(s) = e^{-s}, \quad \psi(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2\tau}}\, d\tau, \quad v \in (0, +\infty).$$

a) Verificare che s è l'ascissa curvilinea di α, calcolando il versore normale $T(s)$.

b) Si fissi s, e sia $p(s)$ il punto ottenuto intersecando l'asse z con la retta tangente alla curva in $\alpha(s)$. Verificare che $d(p(s), \alpha(s)) = 1$ per ogni s.

c) Calcolare la curvatura di α.

11.12 Esercizio

Sia ora Σ la superficie ottenuta per rotazione della trattrice α dell'esercizio precedente intorno all'asse z. Tale superficie è detta *pseudosfera*, e si parametrizza:

$$f(u,s) = \begin{pmatrix} \phi(s)\cos u \\ \phi(s)\sin u \\ \psi(s) \end{pmatrix}, \quad (u,s) \in [0,2\pi) \times [0,\infty),$$

dove $\phi(s) = e^{-s}, \psi(s) = \int_0^s \sqrt{1-e^{-2s}}\, ds$. Si osservi che Σ è una superficie illimitata.

a) Calcolare l'area della regione $\Sigma(a)$ dove $0 \leq s \leq a$.

b) Mostrare come l'area totale della pseudosfera:

$$\mathrm{Area}(\Sigma) \doteq \lim_{a\to\infty} \mathrm{Area}(\Sigma(a))$$

sia un numero finito, e calcolare tale numero.

c) Calcolare la curvatura gaussiana di Σ.

11.13 Esercizio

Si consideri la superficie parametrizzata $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita come:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u-2v \\ 2u-v \\ -2u^2+5uv-2v^2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare prima e seconda forma fondamentale, e curvatura gaussiana.

b) Si determinino le direzioni asintotiche nel punto $f(0,0)$.

c) Si determini la curvatura geodetica e la curvatura normale della sezione piana ottenuta intersecando Σ con il piano $x+y=0$.