# Geometria Differenziale: Parte 2

A. Savo

Indice delle sezioni



## 1 Curve dello spazio

La definizione di curva parametrizzata dello spazio si ottiene dall'analoga definizione nel piano aggiungendo una terza coordinata.

**Definizione.** *Una curva parametrizzata dello spazio è un' applicazione $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ di classe $C^\infty$ definita su un intervallo $I$ di $\mathbf{R}$. Quindi*

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

*dove $x(t), y(t), z(t)$ sono funzioni differenziabili di $t \in I$. Il vettore*

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

*è detto* vettore velocità *(o vettore tangente) della curva in $t \in [a, b]$. L'insieme di punti*

$$\{\alpha(t) : t \in I\}$$

*è detto* traccia *della curva $\alpha$.*

- La curva $\alpha$ è detta *regolare in $t$* se il vettore velocità in $t$ non è nullo:

$$\alpha'(t) \neq 0.$$

$\alpha(t)$ è regolare su un intervallo $I$ se è regolare in tutti i punti di $I$. Le curve regolari hanno una retta tangente in ogni punto della loro traccia.

• Diremo che $\alpha$ è una curva *piana* se la sua traccia è contenuta in un piano dello spazio (non necessariamente il piano $z = 0$ !). La curva $\alpha$ è *sghemba* se non è piana.

**Esempi.** La curva:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ -2t \\ 2+3t \end{pmatrix}$$

definisce una retta dello spazio, che è ovviamente contenuta in un piano (in realtà, in infiniti piani diversi).

La curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 1 \\ 3\sin t \end{pmatrix}$$

definisce una circonferenza di raggio 3 che giace nel piano $y = 1$.

Notiamo che $\alpha$ è piana se e solo se esistono numeri reali $a, b, c, d$, con $a, b, c$ non tutti nulli, tali che:

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0 \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Questo è anche un criterio che ci permette di determinare esplicitamente il piano contenente la curva.

**Esempio.** La curva

$$\alpha : \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$$

è detta *cubica gobba*. Si verifica facilmente che $\alpha$ è sghemba, poiché l'equazione:

$$at + bt^2 + ct^3 + d = 0$$

è verificata (su un intervallo) se e solo se $a = b = c = d = 0$.

**Esercizio.** Verificare che la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t^2 \\ t+t^2 \end{pmatrix}$$

è piana, e determinare l'equazione del piano che la contiene.

*Soluzione.* Dobbiamo studiare l'equazione in $a, b, c$:

$$a(1+t) + b(1+t^2) + c(t+t^2) + d = 0$$

che deve risultare valida per ogni $t$. La riscriviamo:

$$(a+b+d) + (a+c)t + (b+c)t^2 = 0$$

e otteniamo il sistema omogeneo:

$$\begin{cases} a+b+d=0 \\ a+c=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

che ammette $\infty^1$ soluzioni, tutte proporzionali a

$$a=1,\, b=1,\, c=-1,\, d=-2.$$

Dunque il piano cercato contenente la curva è:

$$x+y-z-2=0.$$

**Ascissa curvilinea.** La lunghezza di una arco di curva, e la funzione ascissa curvilinea, sono definite in modo del tutto analogo al caso piano. In particolare, l'ascissa curvilinea con origine in $t=a$ è la funzione

$$s(t)=\int_a^t |\alpha'(u)|\,du=\int_a^t \sqrt{x'(u)^2+y'(u)^2+z'(u)^2}\,du,$$

e ogni curva può essere riparametrizzata dall'ascissa curvilinea, nel senso che, data $\alpha:[a,b]\to\mathbf{R}^3$, possiamo scrivere

$$\alpha(t)=\bar{\alpha}(s(t))$$

con $\bar{\alpha}:[0,L]\to\mathbf{R}^3$ parametrizzata dall'ascissa curvilinea ($L$ è la lunghezza dell'arco).

## 2 Curvatura e torsione, formule di Frenet

Sia ora $\alpha:[0,L]\to\mathbf{R}^3$ una curva PAC. Il vettore:

$$T(s)\doteq\alpha'(s)$$

ha norma unitaria costante, ed è detto *versore tangente* alla curva. Poniamo:

$$k(s)=|\alpha''(s)|$$

e definiamo $k(s)$ *curvatura* di $\alpha$ in $s$.

- Se $k(s)=0$, diremo che $s$ è un *punto di flesso* di $\alpha$.
- Se il vettore accelerazione $T'(s)=\alpha''(s)$ è non-nullo in $s$, diremo che la curva $\alpha$ è *biregolare* in $s$. Notiamo che, se una curva è biregolare su un intervallo $I$, si ha $k(s)>0$ per ogni $s\in I$; dunque, contrariamente al caso piano:
- la curvatura di una curva biregolare dello spazio è sempre *positiva.*

Poiché $|\alpha'(s)|$ ha norma costante, si dimostra, come nel caso piano, che $\alpha''(s)$ è ortogonale a $\alpha'(s)=T(s)$.

- Se la curva è biregolare ($\alpha''(s)$ non nullo), allora il versore

$$N(s) = \frac{1}{|\alpha''(s)|} \cdot \alpha''(s).$$

si dice *versore normale* alla curva in $s$.

- Infine, il vettore

$$B(s) \doteq T(s) \wedge N(s)$$

ha norma unitaria ed è ortogonale sia a $T(s)$ che a $N(s)$; tale vettore è detto *versore binormale* in $s$.

- La terna ortonormale $(T(s), N(s), B(s))$ è detta *riferimento di Frenet di $\alpha$ in $s$.*

Siccome $\alpha''(s) = T'(s)$ possiamo scrivere (come nel caso piano):

$$T'(s) = k(s)N(s),$$

Ora deriviamo l'identità $\langle B(s), T(s)\rangle = 0$, ottenendo:

$$\langle B'(s), T(s)\rangle + \langle B(s), T'(s)\rangle = 0.$$

Siccome $\langle B(s), T'(s)\rangle = k(s)\langle B(s), N(s)\rangle = 0$, si ha che $B'(s)$ è ortogonale a $T(s)$: esso è anche ortogonale anche a $B(s)$ (poichè $B(s)$ ha norma costante). Dunque $B'(s)$ sarà parallelo a $N(s)$ e possiamo scrivere

$$B'(s) = \tau(s)N(s)$$

per una funzione $\tau(s)$.

- $\tau(s)$ è detta *torsione di $\alpha$ in $s$.*

Infine, da $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ si vede subito che $N(s) = B(s) \wedge T(s)$. Derivando rispetto a $s$ otteniamo:

$$N'(s) = B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s).$$

Dalle formule precedenti, otteniamo

$$\begin{aligned} N'(s) &= \tau(s)N(s) \wedge T(s) + k(s)B(s) \wedge N(s) \\ &= -\tau(s)B(s) - k(s)T(s). \end{aligned}$$

**Teorema 1.** *Sia $(T(s), N(s), B(s))$ il triedo di Frenet. Allora abbiamo le seguenti relazioni, dette Formule di Frenet:*

$$\begin{cases} T'(s) = k(s)N(s) \\ N'(s) = -k(s)T(s) - \tau(s)B(s) \\ B'(s) = \tau(s)N(s) \end{cases} \tag{1}$$

*In forma matriciale:*

$$(T'(s), N'(s), B'(s)) = (T(s), N(s), B(s)) \begin{pmatrix} 0 & -k(s) & 0 \\ k(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2.1 Piano osculatore

Sia $\alpha(s)$ una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea, che sia biregolare in $s$. Il piano generato dai vettori $T(s), N(s)$ si dice *piano osculatore* in $s$.

- Tale piano coincide con il piano generato da $\alpha'(s), \alpha''(s)$, ed è il piano passante per $\alpha(s)$ ortogonale al vettore $B(s)$.

Notiamo che, se la curva $\alpha$ è piana, contenuta nel piano $\pi$, allora il piano osculatore coincide, in tutti i punti, con il piano $\pi$. In generale, il piano osculatore di $\alpha$ in $s_0$ è il piano che meglio approssima $\alpha$ nelle vicinanze di $\alpha(s_0)$. Osserviamo innanzitutto che, se $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è un vettore unitario (quindi $a^2 + b^2 + c^2 = 1$), e se

$$\pi : ax + by + cz = 0$$

è il piano per l'origine ortogonale a $v$ allora la funzione

$$f(x, y, z) = ax + by + cz$$

esprime la distanza (con segno) del punto $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dal piano $\pi$ (il segno è positivo nel semispazio aperto definito dalla direzione di $v$, e negativo nel semispazio opposto).

**Proposizione 2.** *Sia $\alpha(s)$ una curva biregolare, e sia $p = \alpha(0)$. Fissato un piano $\pi$ per $\alpha(0)$, si consideri la funzione*

$$\psi(s) = d(\alpha(s), \pi),$$

*che misura la distanza di $\alpha(s)$ dal piano $\pi$. Allora:*

a) *$\pi$ è il piano osculatore di $\alpha$ in $\alpha(0)$ se e solo se $\psi(s) = o(s^2)$ per $s \to 0$.*

b) *Se $\pi$ è il piano osculatore in $\alpha(0)$, si ha:*

$$\psi(s) = -\frac{k(0)\tau(0)}{6} s^3 + o(s^3).$$

*In particolare, se la torsione è nulla in $\alpha(0)$, allora $\psi(s) = o(s^3)$.*

*Dimostrazione.* a) Fissiamo un sistema di riferimento cartesiano con origine nel punto $\alpha(0)$. Dunque $\alpha(s)$ si esprime

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}.$$

Il piano $\pi$ ha equazione $ax + by + cz = 0$ dove $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ è un versore normale al piano; allora $\psi(s)$ si esprime

$$\psi(s) = ax(s) + by(s) + cz(s) = \langle \alpha(s), v \rangle.$$

Dire che $\psi(s) = o(s^2)$ quando $s \to 0$ equivale a dire che

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0.$$

Ora $\alpha(0)$ appartene al piano, quindi $\psi(0) = 0$. Si ha poi $\psi'(s) = \langle \alpha'(s), v \rangle$ e $\psi''(s) = \langle \alpha''(s), v \rangle$; ricordando che $\alpha'(0) = T(0)$ e $\alpha''(0) = k(0)N(0)$ si ha:

$$\begin{cases} \psi'(0) = \langle T(0), v \rangle \\ \psi''(0) = k(0)\langle N(0), v \rangle \end{cases}$$

Dunque $\psi'(0) = \psi''(0) = 0$ se e solo se $v$ è ortogonale a $T(0)$ e $N(0)$, dunque parallelo a $B(0)$. In conclusione $\psi'(0) = \psi''(0) = 0$ s e solo se $\pi$ è il piano osculatore di $\alpha$ in $\alpha(0)$.
b) Supponiamo ora che $\pi$ sia il piano osculatore in $\alpha(0)$. Dunque $v = B(0)$. Sappiamo che $\psi''(s) = \langle \alpha''(s), B(0) \rangle = k(s)\langle N(s), B(0) \rangle$, dunque:

$$\psi'''(s) = k'(s)\langle N(s), B(0) \rangle + k(s)\langle N'(s), B(0) \rangle.$$

Usande le formule di Frenet, e calcolando la derivata in $s = 0$ otteniamo:

$$\psi'''(0) = -k(0)\tau(0),$$

e b) segue di conseguenza. □

Determiniamo ora l'equazione del piano osculatore in una parametrizzazione arbitraria.

**Proposizione 3.** *Sia $\alpha(t)$ una curva dello spazio, che risulti biregolare in $t$. Allora il piano osculatore di $\alpha$ in $t$ è il piano passante per $\alpha(t)$ ortogonale al vettore $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$. In particolare, il versore binormale in $\alpha(t)$ è:*

$$B(t) = \frac{1}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|} \cdot \alpha'(t) \wedge \alpha''(t).$$

*Dimostrazione.* Possiamo scrivere

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t))$$

con $\bar{\alpha}(s)$ parametrizzata dall'ascissa curvilinea, cioè $\bar{\alpha}'(s) = 1$. Derivando rispetto a $t$:

$$\begin{cases} \alpha'(t) = \bar{\alpha}'(s) \cdot s'(t) = |\alpha'(t)| T(s) \\ \alpha''(t) = \dfrac{d}{dt}|\alpha'(t)| \cdot T(s) + |\alpha'(t)|^2 T'(s) \end{cases}.$$

Abbiamo dunque:

$$\begin{aligned}\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) &= |\alpha'(t)|^3 T(s) \wedge T'(s) \\ &= |\alpha'(t)|^3 k(s) T(s) \wedge N(s) \\ &= |\alpha'(t)|^3 k(s) B(s)\end{aligned} \tag{2}$$

Poichè la curva è biregolare, $|\alpha'(t)|^3 k(s)$ è non nullo e il vettore $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$ è parallelo al vettore $B(s)$. Poiché quest'ultimo è ortogonale al piano osculatore nel punto dato, anche $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$ lo sarà. □

Osserviamo il seguente

**Teorema 4.** *Una curva è piana se solo se ha torsione identicamente nulla.*

*Dimostrazione.* Se una curva è piana, contenuta nel piano $\pi$, allora $\pi$ è il piano osculatore di $\alpha$ in qualsiasi punto di $\alpha$. Poiché il piano osculatore ha versore normale dato da $B(s)$, si ha che $B(s)$ deve essere costante, dunque $B'(s) = 0$ e quindi $\tau(s) = 0$.
Viceversa, supponiamo che $\tau(s)$ sia identicamente nulla. Allora $B(s)$ è costante e quindi $B(s) = B(0) \doteq B$. Vogliamo dimostrare che $\langle \alpha(s) - \alpha(0), B \rangle = 0$, cosicché $\alpha(s)$ è interamente contenuta nel piano passante per $\alpha(0)$ ortogonale a $B$. Poniamo:

$$\psi(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B \rangle.$$

Si ha:

$$\psi'(s) = \langle \alpha'(s), B \rangle = \langle T(s), B(0) \rangle = \langle T(s), B(s) \rangle = 0$$

per ogni $s$; poiché $\psi(0) = 0$ , abbiamo $\psi(s) = 0$ per ogni $s$, dunque l'asserto.

□

### 2.2 Formule in una parametrizzazione qualunque

Si hanno le seguenti espressioni.

**Teorema 5.** *Sia $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ una curva regolare. Allora si ha:*

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}$$

*Notiamo la seguente espressione equivalente:*

$$\tau(t) = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}$$

**Corollario 6.** *La curva $\alpha(t)$ è piana se e solo se* $\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)) = 0$ *per ogni $t$.*

*Dimostrazione.* Possiamo scrivere

$$\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t)),$$

con $\bar{\alpha}$ parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Poniamo

$$s'(t) = |\alpha'(t)| \doteq v(t).$$

Dunque

$$\alpha'(t) = v(t)T(s).$$

Si ha poi:

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= v'(t)T(s) + v(t)^2 T'(s) \\ &= v'(t)T(s) + v(t)^2 k(s)N(s) \end{aligned} \tag{3}$$

Quindi:

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = v(t)^3 k(s)B(s). \tag{4}$$

da cui otteniamo, prendendo la norma ambo i membri:

$$k(s) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Derivando (3):

$$\alpha'''(t) = v''(t)T(s) + v'(t)v(t)T'(s) + (v(t)^2 k(s))' N(s) + v(t)^3 k(s) N'(s)$$

Considerato che $T' = kN, N' = -kT - \tau B$ possiamo scrivere:

$$\alpha'''(t) = f(t)T + g(t)N + h(t)B$$

dove $f(t), g(t)$ sono opportune funzioni di $t$ (che non ci interessa al momento calcolare esplicitamente), e dove $h(t) = -v(t)^3 k(s)\tau(s)$.

$$\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle = v(t)^3 k(s) h(t) = -v(t)^6 k(s)^2 \tau(s).$$

Dall'espressione di $k(s)$ precedente vediamo che

$$v(t)^6 k(s)^2 = |\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2$$

e si ha dunque l'asserto. $\square$

### 2.3 Triedro di Frenet in una parametrizzazione arbitraria

Il vettore $\alpha'(t)$ è tangente alla curva; il vettore

$$T(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|}\alpha'(t) \tag{5}$$

è tangente e ha norma unitaria; dunque $T(t)$ è il versore tangente della curva in $\alpha(t)$.

Ora, sappiamo che $\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)$ è ortogonale al piano osculatore, dunque è parallelo al versore binormale; dalla (4) i vettori hanno lo stesso verso e dunque:

$$B(t) = \frac{1}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}\alpha'(t) \wedge \alpha''(t). \tag{6}$$

Infine, poichè $(T, N, B)$ formano una base ortonormale orientata, dalla condizione $B = T \wedge N$ avremo anche

$$N(t) = B(t) \wedge T(t). \tag{7}$$

Le (5),(6),(7) permettono il calcolo esplicito del riferimento di Frenet in una qualsiasi parametrizzazione.

### 2.4 Esempio: elica circolare

La curva:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

è un esempio di *elica circolare*. La traccia della curva è contenuta nel cilindro dello spazio di equazione $x^2 + y^2 = 1$.
Si ha:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad \alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si vede che la curva è regolare. Ora:

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

dunque

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{2}, \quad |\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = \sqrt{2},$$

e la curvatura:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{1}{2}.$$

è costante.
Per quanto riguarda la torsione, dobbiamo calcolare la derivata terza:

$$\alpha'''(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Risulta che

$$\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle = 1,$$

dunque

$$\tau(t) = -\frac{1}{2}.$$

Dunque, un'elica circolare ha curvatura e torsione costanti.

- Verificare che la lunghezza di una spira dell'elica è $2\sqrt{2}\pi$.

### 2.5 Esempio: cubica gobba

Un esempio di cubica gobba è dato dalla curva:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = 2t^3 \end{cases}$$

È una curva piana ? Vediamo se è possibile trovare $a, b, c, d$ tali che l'equazione

$$ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0,$$

sia verificata per ogni $t$. Questa diventa

$$at + bt^2 + 2ct^3 + d = 0$$

che è vera per ogni $t$ solo se $a, b, c, d$ sono tutti nulli. Dunque, la curva è sghemba, e verificheremo questa cosa in modo indipendente, calcolando la torsione.
Abbiamo:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 2t^3 \end{pmatrix}, \alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 6t^2 \end{pmatrix}, \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 12t \end{pmatrix}, \alpha'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Dunque:

$$|\alpha'(t)|^2 = 1 + 4t^2 + 36t^4$$

Notiamo che la curva è biregolare per ogni valore di $t$. Veniamo alla curvatura. Si ha:

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 12t^2 \\ -12t \\ 2 \end{pmatrix}$$

quindi:

$$k(t) = \sqrt{\frac{144t^4 + 144t^2 + 4}{(1 + 4t^2 + 36t^4)^3}}.$$

Ora la torsione. Si ha:

$$\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle = 24.$$

Dunque

$$\tau(t) = -\frac{24}{144t^4 + 144t^2 + 4}.$$

### 2.6 Piano normale, piano rettificante

Abbiamo già definito il piano osculatore di una curva dello spazio, in $s$, come il piano per $\alpha(s)$ generato dai vettori $T(s)$ e $N(s)$, quindi il piano per $\alpha(s)$ ortogonale al versore binormale $B(s)$.

- Il piano per $\alpha(s)$ ortogonale a $T(s)$ è detto *piano normale*;
- il piano per $\alpha(s)$ ortogonale a $N(s)$ è detto *piano rettificante*.

**Esercizio.** Determinare il triedro di Frenet e le equazioni dei piani: osculatore, normale rettificante, per la curva (cubica gobba) precedente, per il valore $t = 1$, ovvero nel punto $\alpha(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

## 3 Teoremi di rigidità

Come prima cosa, verifichiamo che la curvatura e il valore assoluto della torsione sono invarianti per isometrie dello spazio. Precisamente si ha :

**Teorema 7.** *Sia $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare, e sia $f$ un'isometria di $\mathbf{R}^3$. Si consideri la curva $\beta = f \circ \alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^3$. Allora si ha per ogni $s \in [0, L]$:*

$$k_\beta(s) = k_\alpha(s)$$

*e inoltre*

$$\tau_\beta(s) = \begin{cases} \tau_\alpha(s) & \text{se } f \text{ è diretta,} \\ -\tau_\alpha(s) & \text{se } f \text{ è inversa.} \end{cases}$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

In questa sezione dimostreremo che, a meno di isometrie, esiste un'unica curva dello spazio con curvatura e torsione assegnate.

Data una curva biregolare $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}$ sia $(T(s), N(s), B(s))$ il suo riferimento di Frenet in $s$. Allora si ha:

$$(T'(s), N'(s), B'(s)) = (T(s), N(s), B(s)) \begin{pmatrix} 0 & -k_\alpha(s) & 0 \\ k_\alpha(s) & 0 & \tau_\alpha(s) \\ 0 & -\tau_\alpha(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Denotiamo con $X(s)$ la matrice $3 \times 3$ di colonne $T(s), N(s), B(s)$. Scriveremo dunque

$$X(s) = (T(s), N(s), B(s))$$

identificando la terna di Frenet con la matrice $X(s)$. Poichè il riferimento di Frenet è ortonormale, e positivamente orientato, la matrice $X(s)$ è ortogonale, con $\det X(s) = 1$ per ogni $s$. Le formule di Frenet si esprimono in forma matriciale:

$$X'(s) = X(s)A(s) \tag{8}$$

dove

$$A(s) = \begin{pmatrix} 0 & -k_\alpha(s) & 0 \\ k_\alpha(s) & 0 & \tau_\alpha(s) \\ 0 & -\tau_\alpha(s) & 0 \end{pmatrix}$$

e dove $X'(s)$ denota la matrice che si ottiene derivando le entrate di $X(s)$. Notiamo che la matrice $A(s)$ è antisimmetrica per ogni $s$.

- *Sia* $\mathbf{Mat}(n\times n)$ *lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine* $n$. *La* (8) *è dunque un'equazione differenziale nell'incognita* $X(s) \in \mathbf{Mat}(n\times n)$. *Sviluppando il prodotto righe per colonne a destra, e uguagliando le entrate corrispondenti, la* (8) *è equivalente a un sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari di* $n^2$ *equazioni in* $n^2$ *incognite, del primo ordine: il riferimento di Frenet* $X(s)$ *è dunque una soluzione di tale sistema.*

In effetti, il seguente lemma, che è conseguenza della teoria delle equazioni differenziali, ci sarà utile.

**Lemma 8.**

*a) Sia* $A : [0, L] \to \mathbf{Mat}(n \times n)$ *una funzione matriciale di* $s \in [0, L]$, *che assumeremo continua. Allora, l'equazione differenziale*

$$\begin{cases} X'(s) = X(s)A(s) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \tag{9}$$

*nell'incognita* $X(s) \in \mathbf{Mat}(n\times n)$ *e con dato iniziale* $X_0 \in \mathbf{Mat}(n\times n)$, *ammette un'unica soluzione* $X(s)$.

*b) Se la matrice* $A(s)$ *è antisimmetrica per ogni* $s$, *e se il dato iniziale* $X_0$ *è una matrice ortogonale (risp.* $X_0 \in \mathbf{SO}(n)$*) allora la soluzione* $X(s)$ *è una matrice ortogonale per ogni* $s \in [0, L]$ *(risp.* $X(s) \in \mathbf{SO}(n)$ *per ogni* $s$*).*

*Dimostrazione.* a) L'esistenza e unicità della soluzione del problema (9) è conseguenza della teoria delle equazioni differenziali.
b) Supponiamo ora che $A(s)$ sia antisimmetrica per ogni $s$. Vogliamo dimostrare che

$$X(s)X(s)^t = I$$

per ogni $s$. Ora, prendendo la trasposta ad ambo i membri di (9) otteniamo:

$$(X'(s))^t = A(s)^t X(s)^t.$$

Poichè la trasposta della derivata è uguale alla derivata della trasposta, si ha $(X'(s))^t = \frac{d}{ds}(X(s)^t)$; siccome $A(s)$ è antisimmetrica ($A(s)^t = -A(s)$) otteniamo

$$\frac{d}{ds}(X(s)^t) = -A(s)X(s)^t.$$

Dunque:

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(X(s)X(s)^t) &= \frac{d}{ds}X(s) \cdot X(s)^t + X(s) \cdot \frac{d}{ds}(X(s)^t) \\ &= X(s)A(s)X(s)^t - X(s)A(s)X(s)^t \\ &= 0.\end{aligned}$$

Poichè $X(0)X(0)^t = I$, si ha in effetti $X(s)X(s)^t = I$ per ogni $s$, dunque $X(s)$ è ortogonale per ogni $s$. Infine, se $\det X(0) = 1$ allora, per la continuità della funzione $s \mapsto \det X(s)$, si deve avere $\det X(s) = 1$ per ogni $s$. □

Dimostriamo ora il seguente teorema di rigidità.

**Teorema 9.** *Date due funzioni:* $\bar{k} : [0, L] \to \mathbf{R}, \bar{\tau} : [0, L] \to \mathbf{R}$ *(con* $\bar{k}(s) > 0$ *per ogni* $s$*), dato un punto* $\alpha_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ *e data una terna ortonormale* $(T_0, N_0, B_0)$ *positivamente orientata, allora esiste un'unica curva biregolare* $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ *tale che:*
1) $\alpha(0) = \alpha_0$*;*
2) *il riferimento di Frenet di* $\alpha$ *in* $s = 0$ *è* $(T_0, N_0, B_0)$*;*
3) $k_\alpha(s) = \bar{k}(s)$, $\tau_\alpha(s) = \bar{\tau}(s)$ *per ogni* $s \in [0, L]$.

*Dimostrazione.* Lo schema è il seguente.

**Primo passo.** In primo luogo determiniamo quello che dovra' essere il riferimento di Frenet $X(s) = (t(s), n(s), b(s))$ della curva incognita $\alpha = \alpha(s)$: questo si puo' fare risolvendo il sistema di equazioni differenziali (8) con matrice $\bar{A}(s)$ determinata dai valori prescritti di curvatura e torsione.

**Secondo passo.** A questo punto dobbiamo definire la curva che sara' soluzione del problema. A tale scopo integriamo il versore velocità $t(s)$ per ottenere il vettore posizione $\alpha(s)$.

**Terzo passo.** Verifichiamo che la curva $\alpha$ cosi' ottenuta verifica i requisiti del teorema; in particolare, che il suo riferimento di Frenet in $s$ coincide proprio con la terna $(t(s), n(s), b(s))$, punto per punto.

Consideriamo quindi il sistema di equazioni differenziali nell'incognita $X(s) \in \mathbf{Mat}(3\times3)$:

$$X'(s) = X(s)\bar{A}(s), \tag{10}$$

dove

$$\bar{A}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -\bar{k}(s) & 0 \\ \bar{k}(s) & 0 & \bar{\tau}(s) \\ 0 & -\bar{\tau}(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Dal lemma precedente, sappiamo che la soluzione $X(s)$ di (10) esiste ed è univocamente determinata dalle condizioni iniziali. Come condizioni iniziali imponiamo:

$$X(0) = (T_0, N_0, B_0),$$

la matrice di colonne $T_0, N_0, B_0$. Dunque $X(0) \in \mathbf{SO}(3)$ e, ancora per il lemma precedente, $X(s) \in \mathbf{SO}(3)$ per ogni $s$. Indichiamo con

$$t(s), n(s), b(s)$$

le colonne di $X(s)$ che dunque formano una base ortonormale positivamente orientata. Consideriamo ora la curva:

$$\alpha(s) = \int_0^s t(u)\, du + \alpha_0. \tag{11}$$

Vogliamo dimostrare che $\alpha(s)$ è l'unica curva che soddisfa i requisiti del teorema; in particolare $\alpha$ è biregolare e, se indichiamo con $(T(s), N(s), B(s))$ il riferimento di Frenet della curva $\alpha$ definita in (11), allora:

$$(T(s), N(s), B(s)) = (t(s), n(s), b(s))$$

per ogni $s$. Notiamo che $\alpha'(s) = t(s)$, che ha norma 1, e $\alpha(0) = \alpha_0$ ; dunque $\alpha$ è regolare, ed è parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Quindi:

$$T(s) = t(s).$$

Ora:

$$\alpha''(s) = t'(s) = \bar{k}(s)n(s).$$

Poichè $\bar{k}(s) > 0$ per ogni $s$, risulta che $\alpha''(s) \neq 0$; dunque $\alpha$ è biregolare. Sappiamo che, per definizione di curvatura:

$$\alpha''(s) = k_\alpha(s)N(s).$$

Dunque, $n(s)$ e $N(s)$ coincidono con il versore di $\alpha''(s)$, dunque sono uguali; di conseguenza

$$k_\alpha(s) = \bar{k}(s)$$

per ogni $s$. Infine, poichè $(T(s), N(s), B(s))$ e $(t(s), n(s), b(s))$ sono entrambe positivamente orientate, abbiamo necessariamente

$$B(s) = b(s)$$

Dunque i riferimenti $(T(s), N(s), B(s))$ e $(t(s), n(s), b(s))$ coincidono in ogni punto; in altre parole, la terna $(t(s), n(s), b(s))$ è il riferimento di Frenet di $\alpha$. A questo punto, è immediato verificare che $\tau_\alpha(s) = \bar{\tau}(s)$ per ogni $s$, e l'esistenza è dimostrata. Infine, l'unicità è conseguenza dell'unicità della soluzione con dato iniziale fissato. Il teorema è dunque dimostrato. □

Il seguente corollario mostra che due curve con curvatura e torsione uguali, punto per punto, differiscono per un'isometria diretta.

**Corollario 10.** *Supponiamo che $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ e $\beta : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ siano due curve dello spazio aventi curvatura e torsione uguali punto per punto:*

$$k_\alpha(s) = k_\beta(s), \quad \tau_\alpha(s) = \tau_\beta(s) \quad \text{per ogni } s \in [0, L].$$

*Allora esiste un'isometria diretta $f$ dello spazio tale che*

$$\beta(s) = f(\alpha(s)).$$

*Dimostrazione.* Detti $\mathcal{F}_\alpha(s) = (T_\alpha(s), N_\alpha(s), B_\alpha(s))$ e $\mathcal{F}_\beta(s) = (T_\beta(s), N_\beta(s), B_\beta(s))$ i riferimenti di Frenet, in $s$, di $\alpha$ e $\beta$, rispettivamente, sia $A$ la matrice ortogonale che trasforma $\mathcal{F}_\alpha(0)$ in $\mathcal{F}_\beta(0)$; notiamo che $\det A = 1$, poichè il riferimento di Frenet di una curva è positivamente orientato per ogni $s$. Consideriamo l'isometria diretta

$$f(x) = Ax + b,$$

dove $b = \beta(0) - A\alpha(0)$, e consideriamo la curva $\tilde{\beta} : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ definita da:

$$\tilde{\beta} \doteq f \circ \alpha.$$

Vogliamo dimostrare che $\tilde{\beta}(s) = \beta(s)$. Notiamo che, siccome $f$ è un'isometria diretta, $f \circ \alpha$ ha curvatura e torsione uguali a quelle di $\alpha$, quindi anche uguali a quelle di $\beta$:

$$k_{\tilde{\beta}}(s) = k_\beta(s), \quad \tau_{\tilde{\beta}}(s) = \tau_\beta(s).$$

Inoltre:

$$\tilde{\beta}(0) = f(\alpha(0)) = \beta(0)$$

e, per costruzione, il riferimento di Frenet di $\tilde{\beta} = f \circ \alpha$ coincide, in $s = 0$, con quello di $\beta$. Per l'unicità dimostrata nel teorema precedente, si deve avere $\tilde{\beta}(s) = \beta(s)$ per ogni $s$. □

Concludiamo con il seguente enunciato, che riassume in modo sintetico i risultati che abbiamo appena dimostrato.

**Corollario 11.** *A meno di isometrie dirette, esiste un'unica curva dello spazio con curvatura e torsione assegnate.*

## 4 Esercizi

**Esercizio 1.** Si consideri la curva (cubica gobba):

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 6t^2 \\ 4t^3 \end{pmatrix}, \ t \geq 0.$$

Dopo aver osservato che $\alpha$ è regolare per ogni $t \in \mathbf{R}$, determinare la funzione ascissa curvilinea $s : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ e calcolare la lunghezza della curva da $t = 0$ a $t = 2$. Determinare inoltre:

b) curvatura e torsione nel punto $\alpha(t)$;

c) il triedro di Frenet nell'origine;

d) l'equazione della retta tangente nel punto $\alpha(2)$;

e) l'equazione del piano osculatore e del piano normale nel punto $\alpha(0)$.

**Esercizio 2.** È data la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2 - t^2 \\ 1 + t \\ 4 + 2t - t^2 \end{pmatrix}$$

a) Dopo aver osservato che $\alpha$ è regolare per ogni $t \in \mathbf{R}$, determinare l'equazione della retta tangente nel punto $\alpha(0)$.

b) Determinare curvatura e torsione della curva nel punto generico $\alpha(t)$.

c) Determinare il triedro di Frenet per il valore $t = 1$ e l'equazione di ciascuno dei piani: osculatore, normale,rettificante.

d) È vero che $\alpha$ è piana ? In tal caso, determinare l'equazione del piano che la contiene.

**Esercizio 3.** È data la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 - e^{-t} \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \geq 0.$$

a) Determinare la curvatura $k(t)$ e la torsione $\tau(t)$ di $\alpha$ al variare di $t \in [0, \infty)$.

b) Stabilire se esistono i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to+\infty} k(t), \quad \lim_{t\to+\infty} \tau(t).$$

c) Sia $\pi_t$ il piano osculatore di $\alpha$ nel punto $\alpha(t)$. È vero che $\pi_t$ tende a un piano limite quando $t \to \infty$ ?

**Esercizio 4.** È data la curva (elica circolare)

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

con $a, b$ costanti positive.

a) Determinare la curvatura $k(t)$ e la torsione $\tau(t)$ di $\alpha$ al variare di $t \in [0, \infty)$.

b) Sia $\pi_t$ il piano osculatore di $\alpha$ nel punto $\alpha(t)$. È vero che $\pi_t$ tende a un piano limite quando $t \to \infty$ ?

c) Determinare l'equazione cartesiana di $\pi_t$ se $t = 2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$.

**Esercizio 5.** Sia $\alpha : [-L, L] \to \mathbf{R}$ una curva biregolare dello spazio, parametrizzata dall'ascissa curvilinea $s$.

a) Scrivere lo sviluppo di Taylor, fino al terzo ordine, della funzione vettoriale $\alpha(s)$ nell'intorno di $s = 0$, esprimendo i coefficienti in funzione del riferimento di Frenet in $s = 0$ (vale a dire, in funzione della terna ortonormale $(T(0), N(0), B(0))$; usare le formule di Frenet).

b) Determinare lo sviluppo di Taylor intorno a $s = 0$, fino al terzo ordine, di ciascuna delle seguenti funzioni scalari:

$$\psi_1(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), T(0)\rangle, \ \psi_2(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), N(0)\rangle, \ \psi_3(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(0), B(0)\rangle.$$

**Esercizio 6.** Dato $\lambda > 0$, l'applicazione lineare $F_\lambda : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

$$F_\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

di matrice canonica $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ è detta *omotetia* di fattore $\lambda$. Data una curva $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^3$, calcolare curvatura e torsione della curva $F_\lambda \circ \alpha$ in funzione di curvatura e torsione di $\alpha$. È vero che la curvatura è invariante per omotetie ? È vero che la proprietà di essere una curva piana è invariante per omotetie ?

**Esercizio 7.** Data una funzione differenziabile $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

a) Verificare che $\alpha$ è interamente contenuta in un cilindro. Quale ?

b) Calcolare la curvatura di $\alpha$.

c) Calcolare la torsione di $\alpha$, e trovare una funzione $\phi(t)$ in modo tale che $\alpha$ risulti piana.

d) Determinare la generica funzione $\phi(t)$ tale che $\alpha$ risulti piana.

**Esercizio 8.** Studiare curvatura e torsione della curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e stabilire i valori massimi e minimi che puo' assumere la sua curvatura.

**Esercizio 9.** Studiare curvatura e torsione della curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

**Esercizio 10.** Sia $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^3$ una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea, sia $f$ un'isometria di $\mathbf{R}^3$ e sia $\beta$ l'immagine di $\alpha$ tramite $f$, cioè $\beta = f \circ \alpha$. Dimostrare che $k_\beta(s) = k_\alpha(s)$ per ogni $s$, e inoltre:

$$\tau_\beta(s) = \begin{cases} \tau_\alpha(s) & \text{se } f \text{ è diretta,} \\ -\tau_\alpha(s) & \text{se } f \text{ è inversa.} \end{cases}$$

Usare il fatto seguente. Se $A$ è una matrice ortogonale di ordine 3 e se $u, v \in \mathbf{R}^3$, allora:

$$Au \wedge Av = \begin{cases} A(u \wedge v) & \text{se } \det A = 1, \\ -A(u \wedge v) & \text{se } \det A = -1. \end{cases}$$