Geometria Differenziale: Parte 3

A. Savo, Appunti di Geometria Differenziale 2017-18

Indice delle sezioni

1 Superfici

1.1 Superfici parametrizzate

Le superfici dello spazio si possono definire come insiemi di livello di una funzione differenziabile F definita su un aperto di $\mathbf{R}^3$:

$$F(x, y, z) = c$$

dove c è una costante. Ad esempio, se $c > 0$,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

rappresenta la sfera di centro l'origine e raggio $\sqrt{c}$. Un secondo esempio è dato dall'equazione

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$

che rappresenta un cono con vertice nell'origine. Però, per studiare la geometria delle superfici è necessario fornire una rappresentazione parametrica, come nel caso delle curve. Adotteremo dunque la seguente definizione.

Definizione 1. *Una superficie parametrizzata dello spazio è un'applicazione differenziabile $f : \Omega \to \mathbf{R}^3$ dove Ω è un dominio del piano $\mathbf{R}^2$.*
L'immagine $\Sigma = f(\Omega)$ è detta porzione di superficie *(o semplicemente* superficie*) di $\mathbf{R}^3$ e la f è anche detta* parametrizzazione *di Σ.*

Dette u, v le coordinate di un punto di Ω, possiamo dunque scrivere

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

che spesso scriveremo anche

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in \Omega$$

dove $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ sono le componenti di $f(u,v)$.

Fissiamo ora un valore di v, diciamo $v = v_0$, e consideriamo la curva dello spazio

$$\alpha(u) = f(u, v_0),$$

parametrizzata da u, la cui traccia è contenuta in Σ. Al variare di v_0, otteniamo una famiglia di curve, dette *linee coordinate* $v =$ costante. In modo analogo possiamo definire le linee coordinate $u =$ costante.

1.2 Superfici regolari

Consideriamo i vettori ottenuti derivando la funzione vettoriale f rispetto a u e a v:

$$f_u = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix}.$$

Notiamo che f_u, f_v sono entrambe funzioni di (u,v), che associano a ciascun punto di Ω un vettore di $\mathbf{R}^3$; f_u e f_v vanno interpretati come *campi vettoriali* sulla superficie.

Definizione 2. *La parametrizzazione $f : \Omega \to \mathbf{R}^3$ è detta* regolare *in (u,v) se i vettori $f_u(u,v)$ e $f_v(u,v)$ sono linearmente indipendenti. Questo equivale a richiedere che il vettore*

$$f_u(u,v) \wedge f_v(u,v)$$

è non nullo. f è regolare in Ω se è regolare in tutti i punti di Ω. In tal caso, diremo anche che f è un' immersione.

Definizione 3. *Una porzione di superficie Σ di $\mathbf{R}^3$ si dice* regolare *in $p \in \Sigma$ se Σ è immagine di una parametrizzazione $f : \Omega \to \mathbf{R}^3$, tale che $p = f(u,v)$ e f è regolare in (u,v).*

Notiamo anche che la condizione di regolarità equivale a richiedere che la matrice jacobiana di f:

$$J_f = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

abbia rango massimo (quindi, rango pari a due).

1.3 Piano tangente, versore normale

Sia $f : \Omega \to \mathbf{R}^3$ un'immersione e $p = f(u, v)$. Allora i vettori di $\mathbf{R}^3$:

$$E_1(u, v) \doteq f_u(u, v), \quad E_2(u, v) \doteq f_v(u, v)$$

sono per ipotesi linearmente indipendenti, dunque generano un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^3$ di dimensione 2, detto *piano tangente* a Σ in p, e denotato con $T_p\Sigma$. La coppia $(E_1(u, v), E_2(u, v))$ è una base di $T_p\Sigma$.

In ciascun punto, il vettore $f_u \wedge f_v$ è ortogonale sia a f_u che a f_v, e quindi è ortogonale al piano tangente passante per il punto. Il versore

$$N = \frac{1}{|f_u \wedge f_v|} f_u \wedge f_v$$

è detto *versore normale* alla superficie Σ nel punto dato. È chiaro che $N = N(u, v)$ dipende dal punto dato, e in genere varia con (u, v).

• Idenitificando $N(u, v)$ (che è un vettore di norma unitaria) con un punto della sfera di centro l'origine e raggio 1, che d'ora in poi denoteremo con $\mathbf{S}^2$, otteniamo un'applicazione

$$N : \Sigma \to \mathbf{S}^2$$

che è spesso chiamata *mappa di Gauss.*

Se $p = f(u, v)$, il piano tangente $T_p\Sigma$ si identifica con il piano di $\mathbf{R}^3$ passante per l'origine, ortogonale al versore normale $N(u, v)$.

1.4 Piano tangente affine

Il piano dello spazio $\mathbf{R}^3$ passante per il punto $p = f(u, v)$ e parallelo ai vettori $f_u(u, v)$ e $f_v(u, v)$ è detto *piano tangente affine di Σ in p.* Esso si denota con $T_p^{\mathrm{aff}}\Sigma$, ed è anche il piano passante per p, ortogonale al versore normale a Σ nel punto.

Il piano tangente affine in p è il piano che meglio approssima la superficie nell'intorno del punto dato.

Se $N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ è il versore normale in $p = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$, il piano tangente affine alla superficie Σ nel punto avra' dunque equazione:

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Dunque, data una superficie Σ, possiamo definire il piano tangente affine e il versore normale in ogni punto dove Σ è regolare.

2 Esempi

2.1 Sfera

Si consideri l'applicazione $f : \Omega \to \mathbf{R}^3$

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} R\cos u \cos v \\ R\sin u \cos v \\ R\sin v \end{pmatrix}, \quad \Omega = [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

È chiaro che la dipendenza da u e v è di classe C^∞, dunque f ammette derivate parziali di ogni ordine. Notiamo che

$$x(u, v)^2 + y(u, v)^2 + z(u, v)^2 = R^2$$

e $\Sigma = f(\Omega)$ è contenuta nella sfera di centro l'origine e raggio R, che ha equazione $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

• Si verifica infatti che $f(\Omega)$ è tutta la sfera, privata dei poli $(0, 0, R), (0, 0, -R)$. Si verifica anche che f è iniettiva.

Si ha:

$$f_u = \begin{pmatrix} -R\sin u \cos v \\ R\cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} -R\cos u \sin v \\ -R\sin u \sin v \\ R\cos v \end{pmatrix}.$$

Si vede che i tre minori della matrice jacobiana hanno determinante:

$$R^2 \cos u \cos^2 v, \quad R^2 \sin u \cos^2 v, \quad R^2 \sin v \cos v.$$

Poiche' $\cos v$ è positivo sull'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, il terzo minore si annulla solo per $v = 0$; ma in tal caso almeno uno dei due minori restanti ha determinante non nullo : f è regolare su tutto Ω, ed è quindi un'immersione.

Estendendo il dominio Ω alla sua chiusura, cioè a

$$\bar{\Omega} = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

allora $f(\Omega)$ è l'intera sfera, ma f non risulterebbe regolare nei punti dove $v = \pm\frac{\pi}{2}$. Inoltre, f perderebbe la proprietà di essere iniettiva.

Fissato $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, la linea coordinata $v = c$ è la curva dello spazio

$$\alpha(u) = f(u, c) = \begin{pmatrix} R\cos c \cdot \cos u \\ R\cos c \cdot \sin u \\ R\sin c \end{pmatrix},$$

corrispondente al parallelo (cerchio) di raggio $\rho = R\cos c$, che giace sul piano $z = R\sin c$. In particolare, per $c = 0$, otteniamo il cerchio massimo (equatore) intersezione della sfera con il piano $z = 0$. Quindi:

- Le linee coordinate $v =$ costante sono paralleli.

In modo analogo:

- Le linee coordinate $u =$ costante sono meridiani.

In effetti, u e v sono, rispettivamente, la longitudine e la latitudine di un punto sulla sfera, e la coppia (u, v) va interpretata come *coordinate curvilinee* di un punto sulla sfera stessa.

Infine, si verifica che il versore normale è:

$$N(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, determiniamo il piano tangente affine alla sfera unitaria (cioè, prendiamo $R = 1$) nel punto $(u_0, v_0) = (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Il punto di Σ corrispondente è

$$p_0 = f(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = N(u_0, v_0).$$

Il piano tangente affine in p_0 è:

$$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(y - \frac{1}{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(z - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0,$$

ovvero

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}z - 1 = 0.$$

2.2 Piano

Le formule

$$\begin{cases} x = 2 - u + 2v \\ y = u + v \\ z = 3 + 3v \end{cases}$$

dove $(u, v) \in \mathbf{R}^2$, parametrizzano un piano; precisamente, il piano passante per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ parallelo ai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Per ottenere la sua equazione cartesiana, basta eliminare i parametri u, v. Otteniamo l'equazione

$$x + y - z + 1 = 0.$$

In generale, l'applicazione dipendente da u, v:

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 u + a_2 v \\ y = y_0 + b_1 u + b_2 v \\ z = z_0 + c_1 u + c_2 v \end{cases}$$

parametrizza il piano dello spazio passante per il punto $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ parallelo ai vettori $w_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$. È chiaro che il versore normale è costante, non dipende da (u, v), ed è dato da

$$N(u, v) = w_1 \wedge w_2.$$

Il piano tangente affine coincide con Σ in ogni suo punto.

2.3 Cilindro

Le formule:

$$\begin{cases} x = R \cos u \\ y = R \sin u \\ z = v \end{cases}$$

parametrizzano il cilindro circolare retto di raggio R; eliminando i parametri, infatti, otteniamo l'equazione cartesiana

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

nelle incognite x, y, z. Si ha:

$$f_u = \begin{pmatrix} -R \sin u \\ R \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice jacobiana è:
$$\begin{pmatrix} -R\sin u & 0 \\ R\cos u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
e si vede che ha rango 2 per ogni u, v (poiché $\sin u$ e $\cos u$ non possono annullarsi contemporaneamente). Dunque f è regolare per ogni u, v.

• Le linee coordinate $u = c$ sono rette parallele all'asse z; le linee coordinate $v = c$ sono circonferenze di raggio R che giacciono sul piano $z = c$.

2.4 Cono

Le formule:
$$\begin{cases} x = v\cos u \\ y = v\sin u \\ z = v \end{cases}$$
parametrizzano il *cono* di equazione:
$$x^2 + y^2 = z^2,$$
ottenuta eliminando i parametri u e v. Abbiamo:
$$f_u = \begin{pmatrix} -v\sin u \\ v\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Se $v = 0$ abbiamo $f_u = 0$ dunque l'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = f(0,0)$ è un punto singolare. Se $v \neq 0$ il minore formato dalle prime due righe e prime due colonne ha determinante
$$\begin{vmatrix} -v\sin u & \cos u \\ v\cos u & \sin u \end{vmatrix} = -v^2$$
quindi diverso da zero. Ne segue che la superficie è regolare per ogni $v \neq 0$, quindi in ogni punto dell'immagine diverso dall'origine.

Le linee coordinate $u = c$ sono rette passanti per l'origine, che formano con l'asse z un angolo costante. Le linee coordinate $v = c$ sono circonferenze di raggio $\sqrt{|c|}$, giacenti sul piano $z = c$.

• Vedere su quale dominio di definizione la parametrizzazione f è iniettiva.

3 Superfici di livello

3.1 Grafici di funzioni

Una superficie si puo' ottenere anche come grafico di una funzione delle variabili x, y:

$$z = F(x, y).$$

In tal caso, una parametrizzazione, su un dominio Ω dove f è differenziabile, sarà:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = F(u, v) \end{cases}$$

e dunque la matrice jacobiana è:

$$J_\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ F_u & F_v \end{pmatrix}$$

che ha evidentemente rango 2 per ogni u, v. Dunque:

- *il grafico di una funzione (differenziabile) è una porzione di superficie regolare.*

3.2 Superfici di livello

Sia $F(x, y, z)$ una funzione (differenziabile) delle variabili x, y, z. Se $c \in \mathbf{R}$ il sottoinsieme

$$F^{-1}(c) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R} : F(x, y, z) = c \right\}$$

è detto *superficie di livello* di F. Diremo anche che $F^{-1}(c)$ ha equazione (cartesiana)

$$F(x, y, z) = c.$$

- $p \in \mathbf{R}^3$ è detto *punto critico* di F se il gradiente di F si annulla in p:

$$\nabla F(p) = 0.$$

Se p non è critico, si dirà *punto regolare* di F.

- Il numero c si dice *valore critico* di F se $F^{-1}(c)$ contiene almeno un punto critico. c si dice *valore regolare* di F se non è un valore critico, ovvero se $F^{-1}(c)$ non contiene punti critici.

Vogliamo vedere se una data superficie di livello è regolare, ovvero è immagine di una parametrizzazione regolare. Il teorema che segue generalizza l'analogo risultato per le curve di lvello. Il teorema delle funzioni implicite implica che, se p non è un punto critico, allora in un intorno di p la superficie di livello è il grafico di una funzione, dunque è regolare. Otteniamo il seguente risultato.

Teorema 4. *Sia $\Sigma : F(x,y,z) = c$ una superficie di livello e sia p un punto di Σ.*
a) *Se p è un punto regolare di F (quindi, se $\nabla F(p) \neq O$) allora Σ è regolare in p. In particolare, se c è un valore regolare di F allora Σ è regolare ovunque.*
b) *Se p è un punto regolare di Σ, allora il gradiente $\nabla F(p)$ è ortogonale al piano tangente affine di Σ in p. In particolare, il versore normale di Σ in p è dato da:*

$$N(p) = \frac{1}{|\nabla F(p)|} \cdot \nabla F(p).$$

c) *Se il versore normale di Σ in p è $N(p) = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ allora l'equazione del piano tangente affine in $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ è:*

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Esempio. Studiamo le superfici di livello della funzione $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, ovvero le superfici:

$$\Sigma_c : x^2 + y^2 - z^2 = c$$

al variare di c. Si ha:

$$\nabla F(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix},$$

che si annulla solo nell'origine. Dunque, l'unico punto critico di F è $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e l'unico valore critico è $c = F(0,0,0) = 0$. Ne segue che

- se $c \neq 0$, la superficie $x^2 + y^2 - z^2 = c$ è regolare in ogni suo punto; tale superficie è un esempio di *iperboloide iperbolico.*
- La superficie $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ è regolare in ogni suo punto, ad eccezione dell'origine. Si noti che, se $c = 0$, allora Σ è un cono di vertice l'origine.

Ad esempio, il punto $p = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ appartiene a $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e si ha

$$\nabla F(p) = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Dunque p è regolare, e

$$N(p) = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Il piano tangente affine in p ha equazione

$$3x + 4y - 5z = 0.$$

Verificare che il piano tangente affine in qualunque punto del cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ passa sempre per l'origine.

4 Superfici di rotazione

Sia π un piano dello spazio, e α una curva contenuta in π. Otteniamo una superficie di rivoluzione ruotando α attorno a una retta r, anch'essa contenuta nel piano.

Supponiamo che il piano π sia il piano xz, di equazione $y = 0$. Allora una curva α contenuta in π si parametrizza

$$\alpha : \begin{cases} x = \phi(v) \\ y = 0 \\ z = \psi(v) \end{cases} \tag{1}$$

con $\phi(v), \psi(v)$ funzioni differenziabili definite su un intervallo $[a, b]$. Supporremo per semplicità che la traccia di α sia contenuta nel semipiano $x \geq 0$ del piano xz: quindi $\phi(v) \geq 0$.

- Notiamo che $\phi(v)$ misura la distanza di $\alpha(v)$ dall'asse di rotazione, ovvero, l'asse z. Ora fissiamo v, e ruotiamo il punto $\alpha(v)$ intorno all'asse z: esso descriverà una circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(v) \end{pmatrix}$ e raggio $\phi(v)$; otteniamo una parametrizzazione di tale circonferenza:

$$\begin{cases} x = \phi(v) \cos u \\ y = \phi(v) \sin u \\ z = \psi(v) \end{cases}$$

sull'intervallo $u \in [0, 2\pi]$. Lasciando variare sia u che v, otteniamo una parametrizzazione della superficie di rotazione cosi' ottenuta. In conclusione:

Proposizione 5. *Sia Σ la superficie ottenuta ruotando la curva $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ contenuta nel piano xz (vedi* (1)*) intorno all'asse z. Allora una parametrizzazione di Σ è data da:*

$$X(u, v) = \begin{pmatrix} \phi(v) \cos u \\ \phi(v) \sin u \\ \psi(v) \end{pmatrix},$$

dove $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [a, b]$ e $\phi(v) \geq 0$.

Notiamo che le linee $v = c$ (*paralleli*) sono circonferenze di raggio $\phi(v)$ (che degenerano in un punto se $\phi(v) = 0$) mentre le linee $u = c$ (*meridiani*) sono curve tutte isometriche alla curva α: si ottengono infatti da α mediante una rotazione intorno all'asse z.

Ricordiamo che il piano tangente a Σ nel punto $X(u, v)$ è generato dai vettori X_u, X_v. Ora:

$$X_u = \begin{pmatrix} -\phi(v)\sin u \\ \phi(v)\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_v = \begin{pmatrix} \phi'(v)\cos u \\ \phi'(v)\sin u \\ \psi'(v) \end{pmatrix}.$$

La superficie è regolare esattamente quando X_u, X_v sono linearmente indipendenti, ovvero quando la matrice jacobiana ha rango massimo (cioè due). Tutto questo equivale a richiedere che il vettore $X_u \wedge X_v$ sia non nullo. Un calcolo mostra che

$$X_u \wedge X_v = \begin{pmatrix} \phi(v)\psi'(v)\cos u \\ \phi(v)\psi'(v)\sin u \\ -\phi(v)\phi'(v) \end{pmatrix},$$

dunque:

$$|X_u \wedge X_v|^2 = \phi(v)^2\Big(\phi'(v)^2 + \psi'(v)^2\Big)$$

che si annulla solo quando $\phi(v) = 0$ oppure $\phi'(v) = \psi'(v) = 0$. In conclusione si ha la seguente:

Proposizione 6. *Se la curva α è regolare ($\phi'(v)^2 + \psi'(v)^2 > 0$ su $[a, b]$) e se $\phi(v) > 0$ allora la parametrizzazione della proposizione precedente è regolare su $[0, 2\pi] \times [a, b]$. In tal caso il versore normale è:*

$$N(u, v) = \frac{1}{\sqrt{\phi'(v)^2 + \psi'(v)^2}} \begin{pmatrix} \psi'(v)\cos u \\ \psi'(v)\sin u \\ -\phi'(v) \end{pmatrix}.$$

In particolare, se v è l'ascissa curvilinea su α, allora

$$N(u, v) = \begin{pmatrix} \psi'(v)\cos u \\ \psi'(v)\sin u \\ -\phi'(v) \end{pmatrix}.$$

Esempio. Il *toro* si ottiene ruotando intorno all'asse z la circonferenza del piano xz avente centro in $(a, 0, 0)$ e raggio b, dove si suppone $a > b$. Dunque la curva α è:

$$\alpha(v) = \begin{pmatrix} a + b\cos v \\ 0 \\ b\sin v \end{pmatrix},$$

e conseguentemente otteniamo la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = (a + b\cos v)\cos u \\ y = (a + b\cos v)\sin u \ , \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times [0,2\pi]. \\ z = b\sin v \end{cases}$$

Esempio. La *catenoide* è la superficie ottenuta ruotando intorno all'asse z la curva

$$\alpha(v) = \begin{pmatrix} \cosh v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Otteniamo la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \cosh v \cos u \\ y = \cosh v \sin u \qquad (u,v) \in [0,2\pi] \times \mathbf{R}. \\ z = v \end{cases}$$

Se l'asse di rotazione è un altro asse si procede in modo analogo.

Esempio. Parametrizziamo la superficie di rotazione ottenuta ruotando l'arco di curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{pmatrix}$ del piano xy intorno all'asse x. Per t fissato, la distanza dall'asse è $y(t)$, quindi il raggio del parallelo è $y(t)$ e $x(t)$ è costante durante la rotazione del punto. Se θ è la coordinata angolare, avremo la parametrizzazione

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\cos\theta \ . \\ z = y(t)\sin\theta \end{cases}$$

Ovviamente, se l'asse di rotazione fosse stato l'asse y avremmo la parametrizzazione:

$$\begin{cases} x = x(t)\cos\theta \\ y = y(t) \qquad . \\ z = y(t)\sin\theta \end{cases}$$

4.1 Area di una superficie di rotazione

Sia $\alpha(v) : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ un arco di curva nel piano xz, che supponiamo parametrizzato come segue:

$$\alpha(v) = \begin{pmatrix} \phi(v) \\ 0 \\ \psi(v) \end{pmatrix}, \quad v \in [a,b].$$

Se supponiamo $\phi(v) > 0$ per ogni v, otteniamo una porzione di superficie regolare Σ_a^b ruotando α intorno all'asse z. Qual è la sua area ?
Ciò che segue giustifica la formula (3), che va intesa come definizione dell'area di una porzione di superficie di rotazione. Vedremo poi, dopo aver introdotto la prima forma quadratica fondamentale, come calcolare l'area di una qualunque porzione di superficie, di rotazione oppure no.
Ora, l'elemento infinitesimale d'arco nel punto $\alpha(v)$ è dato da $ds = |\alpha'(v)|\,dv$; considerato che il raggio della circonferenza descritta da $\alpha(v)$ è uguale alla distanza di $\alpha(v)$ dall'asse z, che è uguale a $\phi(v)$, si vede che l'elemento infinitesimale d'area ottenuto ruotando ds è dato da:

$$\begin{aligned} 2\pi\phi(v)ds &= 2\pi\phi(v)|\alpha'(v)|\,dv \\ &= 2\pi\phi(v)\sqrt{\phi'(v)^2+\psi'(v)^2}\,dv \end{aligned} \tag{2}$$

Dunque l'area totale si ottiene integrando da a a b il contributo infinitesimo (2):

$$A(\Sigma_a^b) = 2\pi\int_a^b \phi(v)\sqrt{\phi'(v)^2+\psi'(v)^2}\,dv. \tag{3}$$

5 Superfici rigate

Una superficie rigata è una superficie Σ tale che, per ogni suo punto p, passa una retta r interamente contenuta in Σ. Coni e cilindri sono esempi di superfici rigate.

Sia $\alpha : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ una curva dello spazio (detta *direttrice*: non è richiesto che α sia regolare) e sia $\xi : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ una funzione mai nulla, che va interpretata come campo di vettori lungo α. Allora la superficie parametrizzata $f : [a,b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$ con f cosi' definita :

$$f(u,v) = \alpha(u) + v\xi(u). \tag{4}$$

è detta *superficie rigata*. Notiamo che le linee $u = c$ sono rette passanti per il punto $\alpha(c)$, parallele al vettore $\xi(c) \neq 0$. Tali rette sono dette *generatrici* di Σ.

5.1 Cilindri

Per definizione, un *cilindro* è una rigata le cui generatrici sono tutte parallele tra loro; in questo caso la funzione $\xi(u) = \xi_0$ è costante:

$$f(u,v) = \alpha(u) + v\xi_0.$$

Esempio. *Studiare il cilindro di direttrice* $\alpha(u) = \begin{pmatrix}\cos u \\ 2\sin u \\ 0\end{pmatrix}$ *e generatrici parallele a* $\xi_0 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Σ è il cilindro che proietta l'ellisse $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ del piano xy parallelamente al vettore ξ_0. Il cilindro Σ si parametrizza

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ 2\sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \\ 2\sin u + v \\ v \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$f_u = \begin{pmatrix} -\sin u \\ 2\cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$f_u \wedge f_v = \begin{pmatrix} 2\cos u \\ \sin u \\ -\sin u \end{pmatrix}, \quad |f_u \wedge f_v|^2 = 2 + 2\cos^2 u > 0.$$

Σ è regolare ovunque e il suo versore normale è

$$N = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\cos^2 u}} \begin{pmatrix} 2\cos u \\ \sin u \\ -\sin u \end{pmatrix}.$$

Infine, osserviamo che la superficie in questione ha equazione cartesiana:

$$x^2 + \frac{(y-z)^2}{4} = 1,$$

quindi Σ è una quadrica (vedi capitolo successivo).

5.2 Coni

Un *cono* è una rigata le cui generatrici passano tutte per uno stesso punto. In questo caso la curva $\alpha(u) = \alpha_0$ è costante:

$$f(u,v) = \alpha_0 + v\xi(u).$$

Esempio. *Parametrizzare il cono che proietta la parabola $y = x^2$ del piano xy dal punto $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare l'equazione cartesiana del cono eliminando i parametri u, v.*

Sia $\beta(u) = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ una parametrizzazione della parabola. La generatrice che unisce α_0 con $\beta(u)$ ha vettore direttore $\xi(u) = \beta(u) - p_0 = \begin{pmatrix} u \\ u^2 - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dunque Σ ha parametrizzazione

$$f(u, v) = \alpha_0 + v\xi(u) = \begin{pmatrix} uv \\ 1 + v(u^2 - 1) \\ 1 - v \end{pmatrix}$$

Otteniamo

$$f_u = \begin{pmatrix} v \\ 2uv \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} u \\ u^2 - 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f_u \wedge f_v = -v \begin{pmatrix} 2u \\ -1 \\ 1 + u^2 \end{pmatrix}$$

e si vede che f è regolare se e solo se $v \neq 0$. Infine, dalla parametrizzazione

$$\begin{cases} x = uv \\ y = 1 + v(u^2 - 1) \\ z = 1 - v \end{cases}$$

si ottiene $v = 1-z$; sostituendo nelle prime due equazioni, dopo qualche calcolo, otteniamo l'equazione cartesiana del cono:

$$x^2 - z^2 + yz - y + z = 0.$$

6 Quadriche

Una quadrica è la superficie ottenuta uguagliando a zero un polinomio in x, y, z di grado 2. Quindi la sua equazione cartesiana è:

$$\Sigma : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \quad (5)$$

Consideriamo la matrice simmetrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix};$$

detta *matrice della quadrica*. In questo modo l' equazione (5) si scrive, in forma matriciale:

$$(x, y, z, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

- *Diremo che la quadrica è* generale *se* $\det A \neq 0$, *degenere se* $\det A = 0$.

La forma quadratica dei termini di grado 2:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

di matrice simmetrica

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix},$$

detta *parte principale* di A, gioca un ruolo importante nello studio della quadrica stessa.

Osservazione. Sarebbe piu' corretto dire che A è la *matrice dell'equazione* (5). Poniamo l'attenzione sul fatto che, se $p(x, y, z)$ è il polinomio al primo membro della (5), allora le equazioni $p(x, y, z) = 0$ e $kp(x, y, z) = 0$ con $k \neq 0$, pur avendo le stesse soluzioni, sono da considerarsi come equazioni distinte; in effetti, la prima ha matrice A, mentre la seconda ha matrice kA.

- *Nota*: non forniremo la dimostrazione dei teoremi enunciati in questa sezione.

6.1 Invarianza del determinante di una quadrica

Ricordiamo che fissare un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ significa scegliere un'origine O e assi coordinati x, y, z ortogonali tra loro. Scriveremo

$$\mathcal{R} = (O; x, y, z).$$

Osserviamo che fissare un riferimento cartesiano equivale a scegliere un'origine e una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbf{R}^3$. Sia $\mathcal{R}'$ un secondo riferimento cartesiano, con origine O' e assi coordinati X, Y, Z:

$$\mathcal{R}' = (O'; X, Y, Z),$$

e sia Σ una quadrica. Tale quadrica avrà equazioni diverse, quindi matrici diverse, nei due riferimenti. Denotiamo con A (risp. A') la matrice di Σ nel riferimento $\mathcal{R}$ (risp. $\mathcal{R}'$). Abbiamo il seguente risultato.

Teorema 7. (Invarianza del determinante). *Nella notazione precedente, si ha*

$$\det A = \det A'.$$

Dunque il determinante della matrice di una quadrica è sempre lo stesso, in tutti i riferimenti cartesiani.

6.2 Quadriche generali in forma canonica

Diamo ora una lista di equazioni nelle coordinate X, Y, Z che definiscono le cosiddette *quadriche generali in forma canonica*:

$$
\begin{array}{ll}
a) & \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ellissoide,} \\
b) & \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = -1 \quad \text{ellissoide a punti immaginari,} \\
c) & \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 1 \quad \text{iperboloide iperbolico,} \\
d) & \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = -1 \quad \text{iperboloide ellittico,} \\
e) & \dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 2Z \quad \text{paraboloide iperbolico,} \\
f) & \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 2Z \quad \text{paraboloide ellittico.}
\end{array}
$$

Esercizio. Scrivere la matrice di ciascuna delle quadriche $a), \dots, f)$ e verificare che $a), \dots, f)$ sono effettivamente quadriche generali. Verificare inoltre che, in quanto superfici dello spazio, esse sono tutte regolari.

6.3 Classificazione delle quadriche generali

Teorema 8. *Sia Σ una quadrica generale che, nel riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, x, y, z)$, ha equazione* (5). *Allora esiste sempre un riferimento cartesiano $\mathcal{R}' = (O'; X, Y, Z)$ nel quale l'equazione di Σ assume una delle forme canoniche $a), \dots, f)$.*

Dunque, in un opportuno riferimento cartesiano l'equazione di una quadrica si semplifica, e diventa un'equazione della lista $a), \dots, f)$.
Ora $\mathcal{R}$ è individuato dall'origine O e dalla base ortonormale $\mathcal{B}$; analogamente $\mathcal{R}'$ è individuato dall'origine O' e dalla base ortonormale $\mathcal{B}'$. Sia M la matrice ortogonale che trasforma $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}'$, e sia b il vettore che unisce O con O'. Allora il cambiamento di riferimento da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ è individuato dall'isometria $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definita (nelle coordinate x, y, z) da:

$$f(p) = Mp + b.$$

Diremo che i sottoinsiemi S e S' di $\mathbf{R}^3$ sono *congruenti* (o *isometrici*), se esiste un'isometria f di $\mathbf{R}^3$ che trasforma uno nell'altro:

$$f(S) = S'.$$

Allora il teorema precedente si può anche enunciare in questo modo:

Teorema 9. *Una quadrica generale Σ (intesa come insieme delle soluzioni di* (5)*) è sempre congruente a una delle quadriche a), ..., f). Essa è quindi congruente a: un ellissoide (reale o immaginario), oppure un iperboloide (ellittico o iperbolico), oppure un paraboloide (ellittico o iperbolico).*

7 Riduzione a forma canonica

7.1 Come determinare la forma canonica

Sia Σ una quadrica generale, con matrice A e parte principale Q. Per determinare la forma canonica di Σ, sarà sufficiente calcolare:

- il determinante di A,
- gli autovalori di Q.

Dunque supponiamo che $\det A \neq 0$, e siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ gli autovalori di Q. Se Q ha rango minore di due il determinante di A è nullo. Dunque Q ha rango almeno due, e di conseguenza al piu' uno degli autovalori di Q è nullo. In tal caso, per convenzione, porremo $\lambda_3 = 0$.

La diagonalizzazione della parte principale Q porta al seguente risultato.

Teorema 10. *Sia Σ una quadrica generale che, nel riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O; x, y, z)$ ha equazione* (5)*. Allora possiamo sempre trovare un riferimento cartesiano $\mathcal{R}' = (O'; X, Y, Z)$ nel quale l'equazione di Σ assume una delle seguenti forme.*

1) Se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sono tutti non nulli (quindi, se $rkQ = 3$):

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + p = 0$$

per qualche $p \neq 0$.

2) Se $\lambda_3 = 0$ (quindi λ_1 e λ_2 sono entrambi non nulli e $rkQ = 2$) allora:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + 2qZ = 0$$

per qualche $q \neq 0$.

Nel primo caso la quadrica sarà un ellissoide, se $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hanno tutti lo stesso segno, oppure un iperboloide (ellittico o iperbolico) se ci sono due autovalori di segno opposto. Nel secondo caso la quadrica sara' un paraboloide (ellittico o iperbolico).

Diamo un'idea della dimostrazione. Supponiamo che $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ siano tutti non nulli. Diagonalizzando la parte principale Q mediante una matrice ortogonale, possiamo trovare una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^3$, e quindi un cambiamento di coordinate, che riduce l'equazione della quadrica alla forma

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + ax' + by' + cz' + d = 0$$

(qui x', y', z' sono le coordinate nel nuovo riferimento). Una successiva traslazione degli assi riduce l'equazione alla forma richiesta. La traslazione si determina completando i quadrati per ciascuna delle espressioni

$$\lambda_1 x'^2 + ax', \quad \lambda_2 y'^2 + by', \quad \lambda_3 z'^2 + cz'.$$

Ad esempio,

$$\lambda_1 x'^2 + ax' = \lambda_1 \Big(x' + \frac{a}{2\lambda_1} \Big)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1}.$$

Ponendo

$$X = x' + \frac{a}{2\lambda_1}$$

otteniamo

$$\lambda_1 x'^2 + ax' = \lambda_1 X^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1}$$

e si elimina cosi' il fattore lineare in x'. Analogamente, si determinano le nuove coordinate Y, Z.

Il secondo passo nella determinazione della forma canonica fa uso dell'invarianza del determinante: si calcola il determinante della matrice A' della quadrica nel riferimento $\mathcal{R}'$, e l'uguaglianza $\det A = \det A'$ permette di calcolare le costanti p e q.

7.2 Esempi

Esempio. Ricaviamo la forma canonica della quadrica

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz + c = 0$$

al variare di c. La matrice di Σ è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

con parte principale

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det Q = -4$, e $\det A = -4c$, dunque la quadrica è generale per ogni $c \neq 0$. Un calcolo mostra che

$$p_Q(x) = -(x-2)^2(x+1)$$

dunque gli autovalori sono:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1,$$

e la forma canonica è del tipo

$$2X^2 + 2Y^2 - Z^2 + p = 0.$$

La matrice della quadrica nel nuovo riferimento è

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

con $\det A' = -4p$. Per l'invarianza del determinante ($\det A = \det A'$) si deve avere $p = c$ dunque la forma canonica è:

$$2X^2 + 2Y^2 - Z^2 + c = 0.$$

Dunque se $c > 0$ abbiamo un iperboloide ellittico:

$$\frac{X^2}{(c/2)} + \frac{Y^2}{(c/2)} - \frac{Z^2}{c} = -1$$

mentre se $c < 0$ abbiamo un iperboloide iperbolico:

$$\frac{X^2}{(|c|/2)} + \frac{Y^2}{(|c|/2)} - \frac{Z^2}{|c|} = 1.$$

Notiamo anche che se $c = 0$ la quadrica degenera in un cono:

$$2X^2 + 2Y^2 - Z^2 = 0.$$

Esempio. Consideriamo la quadrica:

$$x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xz + 2yz + 4x - 3 = 0.$$

La sue matrici sono:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo mostra che $\det A = -4$ dunque la quadrica è generale. Il polinomio caratteristico di Q è

$$p(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x = -x(x-1)(x-3),$$

e gli autovalori sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 0$. Dunque la forma canonica è del tipo:

$$X^2 + 3Y^2 + 2qZ = 0,$$

con $q \neq 0$: si vede subito che Σ è un paraboloide ellittico. Per determinare q usiamo l'invarianza del determinante. Sappiamo che $\det A = -8$. D'altra parte, nel nuovo riferimento, la matrice della quadrica è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\det A' = -3q^2$. Uguagliando otteniamo

$$q^2 = \frac{4}{3}.$$

La scelta del segno di q è irrilevante (equivale a scambiare il verso dell'asse Z). Prendendo $q = -\sqrt{\frac{4}{3}}$ otteniamo la forma canonica

$$X^2 + 3Y^2 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}Z = 0.$$

Esempio. Consideriamo la quadrica

$$z^2 + 2xz + 2yz + 2\alpha y - 1 = 0$$

al variare di α. La matrice è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e si ha $\det A = \alpha^2$; dunque Σ è generale se e solo se $\alpha \neq 0$. La parte principale è

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

con autovalori $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 0$. Dunque la forma canonica è del tipo

$$2X^2 - Y^2 + 2qZ = 0$$

con $q \neq 0$ e la quadrica è un parabolide iperbolico. Determiniamo ora q. Nel nuovo riferimento, la matrice della quadrica è

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$$

con determinante $2q^2$. Dall'invarianza del determinante otteniamo $2q^2 = \alpha^2$ quindi $q = \pm\alpha/\sqrt{2}$. Scegliendo il segno negativo, otteniamo la forma canonica

$$2X^2 - Y^2 - \alpha\sqrt{2}Z = 0.$$

8 Quadriche degeneri

8.1 Quadriche semplicemente degeneri (ovvero, di rango tre)

• Diremo che una quadrica è *semplicemente degenere* se $rkA = 3$ (qui A è la matrice della quadrica, definita in precedenza).

Le quadriche semplicemente degeneri risultano essere coni o cilindri; in particolare, superfici rigate. Ecco la lista delle quadriche di rango 3 in forma canonica.

$$\begin{array}{ll}
a) & \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} - \dfrac{Z^2}{c^2} = 0 \quad \text{cono reale,} \\
b) & \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} + \dfrac{Z^2}{c^2} = 0 \quad \text{cono immaginario,} \\
c) & \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cilindro ellittico,} \\
d) & \dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = -1 \quad \text{cilindro (ellittico) immaginario,} \\
e) & \dfrac{X^2}{a^2} - \dfrac{Y^2}{b^2} = 1 \quad \text{cilindro iperbolico,} \\
f) & X^2 + 2aY = 0 \quad \text{cilindro parabolico.}
\end{array}$$

In effetti, la quadrica in c) è la rigata che proietta l'ellisse $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ parallelamente all'asse z, e le sue generatrici sono dunque rette parallele all'asse z. Considerazioni analoghe si possono fare per i cilindri in d) ed e).

Teorema 11. *Sia γ una quadrica semplicemente degenere ($rkA = 3$). Allora:*

1) *Se $rkQ = 3$ e gli autovalori di Q cambiano di segno : cono reale.*

2) *Se $rkQ = 3$ e gli autovalori di Q hanno tutti lo stesso segno : cono immaginario (cioè un punto).*

Supponiamo ora che $rkQ = 2$. Indicando con λ_1, λ_2 gli autovalori non nulli di Q, si avranno i seguenti casi.

3) *Se λ_1 e λ_2 hanno lo stesso segno : cilindro ellittico (eventualmente immaginario).*

4) *Se λ_1 e λ_2 hanno segno opposto : cilindro iperbolico.*

5) *Infine, se $rkQ = 1$, allora la quadrica è un cilindro parabolico.*

8.2 Quadriche di rango due oppure uno

Le quadriche di rango due oppure uno sono sempre unioni di piani (eventualmente immaginari). Ecco la classificazione.

1) $rkA = 2, rkQ = 2 :$ piani incidenti (reali o immaginari).

Le forme canoniche sono, rispettivamente,

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 0, \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 0.$$

Il primo caso si ha quando i due autovalori non nulli di Q hanno segni discordi, il secondo quando hanno segni concordi.

$$2)\ rkA = 2, rkQ = 1: \quad \text{piani paralleli (reali o immaginari).}$$

La forma canonica è

$$X^2 + b = 0, \quad \text{con } b \neq 0.$$

Infine, l'ultimo caso:

$$3)\ rkA = rkQ = 1: \quad \text{piani coincidenti}$$

di forma canonica $X^2 = 0$.

8.3 Esempio

La quadrica

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz + 6x + 12y - 6z + 9 = 0,$$

ha matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 3 & 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Poiché $rkA = 1$, l'epsressione a primo membro dovra' essere un quadrato perfetto. In effetti, l'equazione si scrive

$$(x + 2y - z + 3)^2 = 0$$

e la quadrica è il piano $x + 2y - z + 3 = 0$ contato due volte.

8.4 Esempio

Viceversa, la quadrica

$$x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy - 2xz - 4yz - 9 = 0,$$

ha matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

tali che $rkA = 2, rkQ = 1$. Dunque consiste di due piani paralleli. In effetti l'equazione si scrive

$$(x + 2y - z)^2 = 9$$

e la quadrica è l'unione dei due piani paralleli

$$x + 2y - z = 3, \quad x + 2y - z = -3.$$

9 Quadriche rigate

Abbiamo classificato le quadriche di rango tre, che risultano essere coni oppure cilindri, dunque superfici rigate con direttrice data da una conica. Vediamo ora quali tra le quadriche generali sono rigate. È banale osservare che un ellissoide, essendo una superficie limitata, non può contenere rette, dunque non può essere una superficie rigata.
Consideriamo ora il parabolide ellittico:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Nel suo punto $p_0 = (0, 0, 0)$ il piano tangente è $z = 0$, la superficie giace al di sopra del piano tangente, e lo interseca solo in p_0. È evidente che per p_0 non passa alcuna retta interamente contenuta in p_0. Dunque un paraboloide ellittico non è una superficie rigata.
Analoghe considerazioni si applicano all'iperbolide ellittico.
Vogliamo ora verificare che le quadriche generali rimanenti, cioè, il paraboloide iperbolico e l'iperboloide iperbolico sono, effettivamente, superfici rigate.

9.1 Iperbolide iperbolico

È la quadrica di equazione canonica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

che riscriviamo cosi' :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2},$$

quindi cosi':

$$\Big(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\Big)\Big(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\Big) = \Big(1 + \frac{y}{b}\Big)\Big(1 - \frac{y}{b}\Big).$$

Consideriamo la famiglia di rette, indicizzata da $\lambda \in \mathbf{R} \setminus 0$:

$$r_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \lambda\Big(1 + \dfrac{y}{b}\Big) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\lambda}\Big(1 - \dfrac{y}{b}\Big) \end{cases}$$

È chiaro che r_λ è interamente contenuta in Σ per ogni $\lambda \neq 0$. Se definiamo r_0 e r_∞ nel modo ovvio:

$$r_0 : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0 \\ 1 - \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases}, \quad r_\infty : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0 \\ 1 + \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

risulterà che $r_\lambda \subseteq \Sigma$ per ogni $\lambda \in [-\infty, \infty]$. Resta da verificare che per ogni punto $p_0 \in \Sigma$ passa una retta r_λ per qualche valore di λ. Questo è lasciato per esercizio. Dunque:

Proposizione 12. *Ogni iperboloide iperbolico è una quadrica rigata.*

Si poteva anche procedere fornendo direttamente una parametrizzazione del tipo:

$$f(u, v) = \alpha(u) + v\xi(u).$$

In effetti, possiamo prendere come direttrice l'ellisse ottenuta intersecando la quadrica con il piano xy:

$$\alpha(u) = \begin{pmatrix} a\cos u \\ b\sin u \\ 0 \end{pmatrix},$$

e come generatrice per il punto $\alpha(u)$ la retta per $\alpha(u)$ parallela al vettore

$$\xi(u) = \begin{pmatrix} -a\sin u \\ b\cos u \\ c \end{pmatrix}.$$

Si verifica facilmente che $f(u, v)$ è effettivamente una parametrizzazione di Σ.

È interessante notare che esiste un secondo modo di procedere : definiamo la famiglia di rette

$$s_\mu = \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = \mu\Big(1 - \dfrac{y}{b}\Big) \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = \dfrac{1}{\mu}\Big(1 + \dfrac{y}{b}\Big) \end{cases}$$

al variare di $\mu \in [-\infty, \infty]$. Tali rette sono anch'esse interamente contenute in Σ, e passano per ogni punto di Σ. Dunque:

- Un iperboloide iperbolico è una quadrica rigata *in due modi diversi* : per ogni punto di Σ passa una retta della famiglia r_λ e una retta della famiglia s_μ, entrambe contenute in Σ.

9.2 Paraboloide iperbolico

Verifichiamo che anche il paraboloide iperbolico, di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

è una superficie rigata. Riscriviamo l'equazione nel modo che segue :

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z$$

e definiamo la famiglia di rette, per $\lambda \in (-\infty, \infty)$:

$$r_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\lambda \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{2}{\lambda}z \end{cases}, \quad r_0 : \begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Osserviamo che $r_\lambda \subseteq \Sigma$ per ogni λ; inoltre, se $p_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, allora $p_0 \in r_\lambda$, dove

$$\lambda = \frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}.$$

Dunque Σ è rigata. Una parametrizzazione esplicita si ottiene come segue. Osserviamo che Σ interseca il piano $z=0$ nelle due rette

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=0 \\ z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=0 \\ z=0 \end{cases}.$$

Prendiamo come direttrice la seconda; una sua parametrizzazione è

$$\alpha(u)=\begin{pmatrix} au \\ bu \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A questo punto le generatrici sono definite da

$$\xi(u)=\begin{pmatrix} a \\ -b \\ 2u \end{pmatrix},$$

e la parametrizzazione di Σ data da $f(u,v)=\alpha(u)+v\xi(u)$, ovvero

$$f(u,v)=\begin{pmatrix} a(u+v) \\ b(u-v) \\ 2uv \end{pmatrix}$$

mostra che Σ è una rigata.

- Anche il paraboloide iperbolico è una rigata in due modi diversi: mostrare come.

10 Esercizi

10.1 Esercizio

a) Verificare che l'ellissoide

$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

è una superficie regolare in tutti i suoi punti.

b) Dare una parametrizzazione di Σ; calcolare il versore normale e la mappa di Gauss. È vero che la mappa di Gauss è suriettiva ?

c) Determinare l'equazione del piano tangente affine dell'ellissoide $\Sigma : \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ nel punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

d) Trovare i punti dell'ellissoide di cui alla parte c) in cui il piano tangente affine è parallelo al piano $x + y - z = 0$.

10.2 Esercizio

a) Scrivere la forma canonica delle restanti quadriche generali: iperboloide a una falda, iperboloide a due falde, paraboloide ellittico, paraboloide iperbolico.

b) In ciascun caso, dare una parametrizzazione, verificare la regolarità e determinare il versore normale e la mappa di Gauss.

10.3 Esercizio

a) Calcolare il versore normale dell'iperboloide a due falde:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1,$$

e determinare l'immagine della mappa di Gauss, ristretta alla componente dove $z \geq 1$.

b) Stessa domanda per l'iperboloide a una falda $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

10.4 Esercizio

Le superfici parametrizzate Σ_1, Σ_2 definite da:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x = v\cos u \\ y = v \sin u \\ z = 1 + v^2 \end{cases}, \quad \Sigma_2 : \begin{cases} x = (1+v^2)\cos u \\ y = (1+v^2)\sin u \\ z = v \end{cases} \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2,$$

sono superfici di rotazione intorno all'asse z di due curve $\alpha_1(v), \alpha_2(v)$ contenute nel piano xz.

a) Individuare α_1, α_2 e disegnare Σ_1, Σ_2.

b) Eliminare i parametri u, v per ottenere equazioni cartesiane di Σ_1 e Σ_2. Quale di queste è una quadrica ?

c) Calcolare l'area della porzione di superficie Σ_1 ottenuta ruotando l'arco di curva $\alpha_1(v)$ corrispondente all'intervallo $v \in [0, 1]$.

10.5 Esercizio

Si consideri la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{pmatrix} = 0\}.$$

Esistono quattro punti p_1, p_2, p_3, p_4 tale che $\Sigma \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ è regolare. Determinare tali punti.

10.6 Esercizio

Nel piano xz, è dato l'arco di curva α definito dal seguente grafico:

$$x = \cosh z, \quad z \in (-\infty, \infty).$$

a) Parametrizzare α, quindi parametrizzare la superficie Σ (detta *catenoide*) ottenuta ruotando la curva α intorno all'asse z. Calcolare la prima forma fondamentale.

b) Determinare il versore normale $N = N(\theta, t)$ di Σ in un suo punto arbitrario e calcolare $\lim_{t \to \pm\infty} N(\theta, t)$.

c) Calcolare l'area $A(b)$ della porzione di superficie corrispondente alla striscia $|z| \leq b$, con $b > 0$.

d) Se $A(b)$ è l'area di cui alla parte c), determinare il comportamento asintotico di $A(b)$ quando $b \to +\infty$.

e) Scrivere un'equazione cartesiana di Σ.

10.7 Esercizio

Si consideri la quadrica

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 4xz + 2kx + 2k = 0$$

al variare del parametro k.

a) Scrivere la matrice della quadrica A e determinare i valori di k per i quali la quadrica è generale.

b) Calcolare gli autovalori di Q e determinare la forma canonica di Σ, al variare di k.

c) Stabilire la natura della quadrica quando essa è degenere.

d) Determinare i valori di k per i quali la quadrica è rigata.

e) Verificare che, se $k > 0$, la quadrica consiste di due parti disconnesse, e calcolare la distanza minima tra le due parti quando $k = 3$.

10.8 Esercizio

Determinare la forma canonica della quadrica

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz + 4x + \alpha = 0$$

al variare di α, e stabilire per quali α tale quadrica è generale.

10.9 Esercizio

Determinare la forma canonica della quadrica

$$\Sigma : \alpha x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz - 2x + 2 = 0$$

al variare del parametro α, e stabilire per quali α tale quadrica è generale.

10.10 Esercizio

a) Data la quadrica $\Sigma : x^2 + y^2 - z^2 = 1$, determinare l'equazione del piano tangente affine nel suo punto $p = (1, 1, 1)$.

b) Se π è tale piano, è vero che $\Sigma \cap \pi$ è unione di due rette ? Quali ?

c) Determinare il versore normale nel punto generico di Σ e stabilire se esiste un punto in cui il versore normale è parallelo all'asse z.

10.11 Esercizio

a) Verificare che la superficie $\Sigma : xyz = 1$ è regolare in tutti i suoi punti.

b) Calcolare l'equazione del piano tangente affine nel punto $p = (1, 1, 1)$.

c) Dopo aver osservato che l'origine non è un punto di Σ, determinare il valore minimo di R per il quale la sfera di raggio R centrata nell'origine : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ incontra Σ in almeno un punto. (Suggerimento: sfruttare il fatto che, nel punto di tangenza tra Σ e tale sfera, i versori normali di Σ e della sfera sono paralleli).

d) Usare la parte precedente per calcolare la distanza minima di Σ dall'origine.

10.12 Esercizio

a) Calcolare l'area $A(R)$ della porzione di superficie $z = x^2 - y^2$ corrispondente alla regione dove $x^2 + y^2 \leq R^2$.

b) Determinare il comportamento asintotico di $A(R)$ quando $R \to 0$ e $R \to \infty$; precisamente, dimostrare che $A(R) \sim cR^3$ quando $R \to \infty$, calcolando esplicitamente la costante c, ottenuta come:

$$c = \lim_{R \to \infty} \frac{A(R)}{R^3}.$$

10.13 Esercizio

Per $R > 0$, sia α_R la curva contenuta ottenuta intersecando il paraboloide iperbolico $z = x^2 - y^2$ con il cilindro $x^2 + y^2 = R$.

a) Dare una parametrizzazione di α_R e verificare che α_R è regolare, ed è una curva chiusa.

b) Scrivere l'integrale che calcola la lunghezza totale $L(R)$ della curva α_R, e determinare il comportamento asintotico di $L(R)$ quando $R \to 0$ e $R \to \infty$.

c) Sia $\alpha(t)$ la curva per $R = 1$. Calcolare la curvatura $k(t)$ di α.

d) Determinare il valore numerico della curvatura e della torsione di α nei punti in cui la curva incontra il piano $z = 0$.

10.14 Esercizio

È data la curva α, intersezione del cilindro circolare $x^2 + z^2 = 1$ con il cilindro parabolico $x^2 - y = 0$.

a) Trovare, se possibile, una parametrizzazione regolare di α, e stabilire se α è una curva limitata o illimitata.

b) Determinare l'equazione della retta tangente ad α nel suo punto $(1, 1, 0)$.

c) Calcolare la curvatura di α.

d) Determinare i punti di α in cui la torsione si annulla.