Prova scritta di Geometria 30/01/2017
Ing. Meccanica a.a. 2016/17

Cognome .... Nome ....

L'esame consiste di sei esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Non saranno accettati fogli di brutta copia.

Esercizio 1 a) Classificare la conica $\gamma_k : x^2 + y^2 + 2kxy + 2x - 2y = 0$ al variare del parametro k, e determinarne la forma canonica quando γ_k è una conica generale.
b) Determinare gli eventuali valori di k per i quali la conica γ_k ha intersezione non vuota con tutte le rette del piano.
c) Determinare i valori di k per i quali γ_k è unione di due rette parallele r_1, r_2; in tal caso, determinare l'equazione della retta per l'origine parallela a entrambe le rette r_1, r_2.

Soluzione. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ k & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, *con* $\det A = -2k - 2$. *Quindi* γ_k *è generale per* $k \neq -1$.
Gli autovalori di Q *sono* $1 + k, 1 - k$. *Se* $k \neq 1$ *la forma canonica è*

$$(1 + k)X^2 + (1 - k)Y^2 - \frac{2}{1 - k} = 0$$

(a meno di scambi degli assi coordinati). Se $k = 1$ *la forma canonica è*

$$Y^2 - \sqrt{2}X = 0, \quad \textit{oppure} \quad Y^2 + \sqrt{2}X = 0$$

(a meno di scambi degli assi). Dunque:

- *per* $k < -1$ *e* $k > 1$*: iperbole,*
- *se* $-1 < k < 1$*: ellisse reale,*
- *se* $k = 1$*: parabola reale.*

Infine, se $k = -1$ *si ha una parabola degenere.*

b) *L'unica conica che ha intersezione non vuota con tutte le rette del piano è l'iperbole degenere (coppia di rette incidenti). Dallo studio fatto nella parte a) si vede che* γ_k *non è mai un'iperbole degenere. Dunque : nessun valore di* k.

c) *Unico valore :* $k = -1$. *La direzione delle rette componenti è quella dell'autospazio associato all'autovalore nullo, quindi* $x - y = 0$. *In effetti,*

$$x^2 + y^2 - 2xy + 2x - 2y = (x - y)(x - y + 2).$$

e le rette componenti sono $x-y=0, x-y+2=0$.

Esercizio 2 Dato il sistema lineare:

$$\begin{cases} x+y+(2k+1)z=3 \\ (k-1)x-2y+2z=-6 \\ kx-y+z=k-2 \end{cases}$$

con k parametro reale, determinare :

a) i valori di k per i quali il sistema è compatibile.

b) i valori di k per i quali il sistema ammette una ed una sola soluzione.

c) i valori di k per i quali il sistema ammette infinite soluzioni. Per tali valori, determinare esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

Soluzione. a) *Matrice dei coefficienti e matrice completa sono, rispettivamente:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k+1 \\ k-1 & -2 & 2 \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2k+1 & 3 \\ k-1 & -2 & 2 & -6 \\ k & -1 & 1 & k-2 \end{pmatrix}$$

La matrice dei coefficienti ha determinante pari a $2(k+1)^2$. *Dunque, per* $k \neq -1$ *si ha* $\mathrm{rk}A=3$. *Ora* $\mathrm{rk}A' \geq A=3$*; d'altra parte* $\mathrm{rk}A' \leq 3$ *(poiche' A' ha tre righe). Dunque:*

- *per* $k \neq -1$ *si ha* $\mathrm{rk}A=\mathrm{rk}A'$ *: il sistema è compatibile e ammette un'unica soluzione.*

Scrivendo esplicitamente le matrici A e A', per $k=-1$, si vede che in entrambi i casi le righe sono tutte proporzionali tra loro. Dunque:

- *per* $k=-1$ *si ha* $\mathrm{rk}A=\mathrm{rk}A'=1$*; il sistema è compatibile e ammette* ∞^2 *soluzioni.*

b) $k \neq -1$ *(discusso nella parte a)).*

c) $k=-1$. *Il sistema è equivalente al sistema* $x+y-z+3=0$*, dunque*

$$\mathrm{Sol}(S)=\begin{cases} x=-t+s-3 \\ y=t \\ z=s \end{cases}$$

al variare di $t,s \in \mathbf{R}$.

Esercizio 3 In $\mathbf{R}^4$ sono dati il sottospazio E di equazioni $\begin{cases} x_1+2x_3=0 \\ x_2+x_4=0 \\ x_1+x_2+2x_3+x_4=0 \end{cases}$ e il sottospazio F, generato dai primi tre vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$.

a) Determinare una base di E e una base di $E \cap F$.

b) Determinare la dimensione di $E + F$ e la dimensione di $(E + F) \cap E^\perp$.

c) Stabilire se esiste un endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ tale che $\mathrm{Ker}T = E$ e $\mathrm{Im}T = F$. (Ovviamente, giustificare la risposta).

Soluzione. a) *Base di E data da $(2, 0, -1, 0)^t, (0, 1, 0, -1)^t$. Equazione di F: $x_4 = 0$. Possiamo eliminare la terza equazione che definisce E. Equazioni di $E \cap F$:*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

da cui otteniamo la base $(2, 0, -1, 0)^t$ per $E \cap F$.

b) *Unendo i generatori di E con quelli di F (oppure usando la formula di Grassmann) si vede che $E + F$ ha dimensione 4 dunque $E + F = \mathbf{R}^4$. Ne segue che $(E + F) \cap E^\perp = \mathbf{R}^4 \cap E^\perp = E^\perp$. Dunque*

$$\dim((E + F) \cap E^\perp) = \dim E^\perp = 4 - \dim E = 2.$$

c) *Se esistesse un tale endomorfismo f si avrebbe necessariamente*

$$4 = \dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim E + \dim F$$

Poiché nel nostro caso $\dim E + \dim F = 5$ tale endomorfismo non puo' esistere.

Esercizio 4 Si consideri l'unico endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che $\begin{cases} f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$ dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Determinare la matrice canonica di f, i suoi autovalori e stabilire se f è diagonalizzabile.

b) Determinare, se possibile, una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f.

c) Dato $v = (1, 1, 1)^t$ stabilire se il sottoinsieme $E = \{u \in \mathbf{R}^3 : \langle f(u), v\rangle = 0\}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ oppure no; in caso affermativo, determinare una base di E.

Soluzione. a) *Matrice canonica* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *con autovalori* $2, -1, -1$. *Poichè* A *è simmetrica è anche diagonalizzabile. Dunque* f *è diagonalizzabile.*

b) *L'autospazio associato a* 2 *ha base* $(1,1,1)^t$, *mentre l'autospazio associato a* -1 *ha equazione* $x + y + z = 0$. *Prendendo una base ortonormale di ciascun autospazio, e unendo tali basi, si ottiene la base ortonormale di* $\mathbf{R}^3$*:*

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

formata da autovettori associati rispettivamente agli autovalori $2, -1, -1$.

c) *La linearità di* f, *e la bilinearità del prodotto scalare mostrano che* E *è un sottospazio di* $\mathbf{R}^3$. *Se* $u = (x, y, z)^t$ *si avra'* $f(u) = (y + z, x + z, x + y)^t$. *Poiché* E *ha equazione* $\langle f(u), v\rangle = 0$ *otteniamo*

$$\langle \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

che, semplificata, diventa $x + y + z = 0$. *Dunque una base di* E *è* $((1, -1, 0)^t, (1, 0, -1)^t)$.

Esercizio 5 Nel piano sono dati i punti $O = (0, 0), A = (4, 0), B = (0, 2)$.

a) Determinare i punti P del piano tali che il triangolo ABP sia isoscele sul lato AB e abbia la stessa area del triangolo AOB.

b) Determinare l'equazione della circonferenza di raggio $\sqrt{5}$, con centro nel primo quadrante e tangente a entrambe le rette $r : 2x - y = 0$ e $s : x - 2y = 0$.

c) Determinare l'equazione canonica dell'ellisse di fuochi A, B e semiasse minore $b = 1$. (Si ricordi che nell'equazione canonica dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ i due semiassi sono dati da a e b).

Soluzione. a) *L'area del triangolo* AOB *vale* 4. *Sia* s *la retta per* A *e* B, *e sia* r *l'asse di* AB, *che ha equazione* $r : 2x - y - 3 = 0$. *Il punto mobile* P_t *su* r *ha coordinate* $(t, 2t - 3)$. *Prendendo come base* AB *dovremmo imporre*

$$\frac{1}{2}d(A, B) \cdot d(P_t, s) = 4,$$

e svolgendo i calcoli si ottengono i valori $t_1 = \frac{14}{5}, t_2 = \frac{6}{5}$ *da cui i punti*

$$P_1 = (\frac{14}{5}, \frac{13}{5}), \quad P_2 = (\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}).$$

b) *Dette* (a, b) *le coordinate del centro* C *della circonferenza cercata, dovremo imporre:*

$$\begin{cases} d(C, r) = \sqrt{5} \\ d(C, s) = \sqrt{5} \end{cases}$$

e inoltre $a > 0, b > 0$. *Si ottiene l'unica soluzione* $C = (5, 5)$, *da cui la circonferenza*

$$(x - 5)^2 + (y - 5)^2 = 5.$$

c) *È sufficiente determinare il semiasse maggiore* a *dell'ellisse. Se* $c = F_1F_2$ *è la distanza focale, sappiamo che*

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Poiché $b = 1$ *e* $c = \sqrt{5}$ *otteniamo immediatamente* $a = \sqrt{6}$ *e l'equazione canonica è*

$$\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{1} = 1.$$

Esercizio 6 Nello spazio è data la retta r di equazioni parametriche $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$. Determinare:

a) l'equazione del piano π contenente l'origine e la retta r;

b) equazioni parametriche della retta s passante per l'origine, complanare con r e contenuta nel piano $\pi' : 3x + y + z = 0$;

c) l'equazione della sfera con centro sulla retta r e passante per $A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0)$.

Soluzione. a) *Il piano* π *passa per l'origine e per due punti di* r, *ad esempio* $(-1, 1, 1), (-1, 3, 4)$. *Si ottiene*

$$\pi : x + 3y - 2z = 0.$$

b) *Equazioni cartesiane di* s *sono*

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}.$$

Infatti, s *è evidentemente contenuta nel piano* π', *è complanare con* r *(infatti* r *ed* s *sono entrambe contenute in* $x + 3y - 2z = 0$*) ed è chiaro che passa per l'origine. Risolvendo il sistema, otteniamo equazioni parametriche*

$$s : \begin{cases} x = -5t \\ y = 7t \\ z = 8t \end{cases}.$$

c) *Il centro C della sfera, dovendo appartenere a r, ha coordinate $C = (-1, 1+2t, 1+3t)$. Imponiamo ora $d(C,A) = d(C,B)$: otteniamo $t = -1$ e l'unico punto $C = (-1,-1,-2)$. Il raggio della sfera sara' $R = d(C,A) = 3$. Dunque l'equazione è*

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 9.$$