Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 10

1 Geometria dello spazio

Esercizio 1. Dato il punto $P_0 = (-1, 0, 1)$ e il piano $\pi : x + y + z - 2 = 0$, determinare:
a) Le equazioni parametriche della retta r passante per P_0 e ortogonale a π.
b) La proiezione ortogonale di P_0 su π.
c) La distanza di P_0 da π.

Esercizio 2. Sono dati i punti $A = (-1, 0, 1), B = (1, 1, 2), C = (0, 0, 2)$ e si denoti con r la retta per B e C.
a) Verificare che A non appartiene alla retta r.
b) Determinare l'equazione del piano π passante per A e ortogonale a r.
c) Trovare le coordinate della proiezione ortogonale di A su r.
d) Calcolare la distanza di A da r.

Esercizio 3. Sono dati i punti $A = (0, 1, 0), B = (2, 0, 2)$ e il piano $\pi : x - 2y + z + 1 = 0$. Determinare:
a) L'equazione del piano α passante per l'origine e perpendicolare alla retta per A e B.
b) L'equazione del piano contenente A e B e perpendicolare al piano π.
c) Il punto del piano π piu' vicino ad A.

Esercizio 4. Sono dati la retta $r : \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 3x - z - 6 = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi : x - y + z = 0$.
a) Verificare che r non è ortogonale a π.
b) Trovare le equazioni cartesiane della retta r', proiezione ortogonale di r su π.

Esercizio 5. Sono dati i punti $A = (-1, 0, 1), B = (1, 1, 2), C = (0, 0, 2)$.

a) Verificare che A, B, C non sono allineati.

b) Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per A e ortogonale a entrambi i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

c) Trovare le coordinate del punto D tale che $ABDC$ risulti un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

d) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C.

Esercizio 6. Trovare le equazioni cartesiane della retta r contenuta nel piano $x + y + z = 0$, passante per l'origine e ortogonale alla retta per i punti $A = (1, 0, 2)$ e $B = (1, 1, 0)$.

Esercizio 7. È dato il piano $\pi : x - y + z = 0$.

a) Verificare che la retta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ è interamente contenuta in π.

b) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r' passante per l'origine, perpendicolare a r e contenuta in π.

c) Determinare equazioni parametriche della retta r'' passante per l'origine e perpendicolare a r e r'.

Esercizio 8. Sono dati i punti $A = (1, 1, 0), B = (2, 0, -3), C = (1, k, 2)$ dove k è un parametro, e sia T il triangolo di vertici A, B, C. Determinare i valori di k per i quali:

a) I tre punti sono allineati.

b) Il triangolo T è rettangolo.

c) Il triangolo T è isoscele sulla base BC.

d) Il piano per A, B, C passa per l'origine.

Esercizio 9. Sono date le rette $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$, $\quad r' : \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$. Dopo aver verificato che le rette sono sghembe, determinare:

a) Equazioni parametriche della retta per $P_0 = (1, 0, -1)$ ortogonale sia a r che a r'.

b) Equazioni parametriche della retta ortogonale e incidente sia a r che a r'.

c) La (minima) distanza di r da r'.

Trovare inoltre:

d) L'equazione del piano π_1 contenente r e parallelo a r'.

e) L'equazione del piano π_2 contenente r' e parallelo a r.

Infine, verificare che π_1 e π_2 sono piani paralleli, e che la distanza di π_1 da π_2 uguaglia la distanza di r da r' calcolata in c) .

Esercizio 10. Si considerino il piano $\pi : x + y + z - 3 = 0$ e i suoi due punti $A = (1, 1, 1), B = (3, 0, 0)$.

a) Determinare l'equazione del piano α, perpendicolare a π e passante per A e B.

b) Determinare equazioni cartesiane dell'asse del segmento AB in π; cioe', dell'insieme dei punti di π equidistanti da A e B.

Esercizio 11. Dati il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e la retta $r : \begin{cases} a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$, enunciare (e dimostrare) una condizione necessaria e sufficiente sul determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ affinché il piano e la retta abbiano un'unica intersezione.

2 Circonferenze

Esercizio 12. Si considerino i punti $P_1 = (0, 1), P_2 = (0, -1), P_3 = (2, 3)$.

a) Determinare l'equazione della circonferenza γ passante per i tre punti.

b) Determinare le equazioni delle rette parallele a $x + y = 0$ e tangenti a γ .

c) Determinare l'equazione della retta tangente alla circonferenza γ nel suo punto $(0, 1)$.

d) Il punto $(\frac{13}{2}, 0)$ è interno o esterno a γ?

Esercizio 13. Data la retta $r : x - 2y = 0$ e il punto $A = (3, 0)$, determinare:

a) L'equazione della circonferenza di centro A tangente a r.

b) La proiezione ortogonale di A su r e le coordinate del punto A', simmetrico del punto A rispetto a r.

c) Le coordinate dei punti P di r tali che il triangolo di vertici O, A, P abbia area 3.

Esercizio 14. Si considerino i punti $A = (2, 0), B = (0, -4)$. Determinare:

a) Le equazioni delle circonferenze di raggio 5 passanti per A e B.

b) L'equazione della circonferenza di raggio minimo passante per A e B.

3 Sfere

Esercizio 15. a) Scrivere l'equazione della sfera σ di centro $C = (2, 0, -1)$ e raggio $\sqrt{5}$.

b) Stabilire se il punto $P_0 = (3, 1, 1)$ è interno o esterno alla sfera σ.

c) Determinare il punto della sfera più lontano dall'origine.

Esercizio 16. Verificare che l' equazione $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ rappresenta una sfera dello spazio. Quindi:

a) Calcolare le coordinate del centro e il raggio di σ.

b) Determinare l'equazione del piano tangente alla sfera nel suo punto $A = (2, 1, 3)$.

Esercizio 17. Sono dati i punti $O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0)$.

a) Determinare le equazioni delle sfere di raggio 1 passanti per i tre punti.

b) Determinare l'equazione della sfera di raggio minimo passante per i tre punti.

c) Determinare infine l'equazione della sfera di centro l'origine e tangente al piano $\pi : x - y + 3z - 6 = 0$.