Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 10: soluzioni

1 Geometria dello spazio

Esercizio 1. Dato il punto $P_0 = (-1, 0, 1)$ e il piano $\pi : x + y + z - 2 = 0$, determinare:
a) Le equazioni parametriche della retta r passante per P_0 e ortogonale a π.
b) La proiezione ortogonale di P_0 su π.
c) La distanza di P_0 da π.

Soluzione. a) *Basta imporre che i parametri direttori di r siano uguali ai parametri di giacitura del piano π. Dunque* $r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$ *con equazioni cartesiane* $r : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$.
b) *La proiezione ortogonale cercata è* $H = \pi \cap r = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3})$.
c) *Si ha* $d(P_0, \pi) = d(P_0, H) = \frac{2}{\sqrt{3}}$. *Possiamo verificare la risposta usando la formula della distanza del punto* (x_0, y_0, z_0) *dal piano* $ax + by + cz + d = 0$*:*

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

□

Esercizio 2. Sono dati i punti $A = (-1, 0, 1), B = (1, 1, 2), C = (0, 0, 2)$ e si denoti con r la retta per B e C.
a) Verificare che A non appartiene alla retta r.
b) Determinare l'equazione del piano π passante per A e ortogonale a r.
c) Trovare le coordinate della proiezione ortogonale di A su r.

d) Calcolare la distanza di A da r.

Soluzione. a) *Basta verificare che i tre punti non sono allineati. In ogni modo, r passa per B e un suo vettore direttore è $\overrightarrow{BC} = (-1,-1,0)$: dunque r ha equazioni parametriche:*

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases} .$$

Si verifica facilmente che $A \notin r$.

b) *Sappiamo che i parametri di giacitura di un piano sono le coordinate di un vettore normale al piano. Basta dunque prendere i parametri di giacitura di π uguali ai parametri direttori della retta r, e imporre il passaggio per A. Otteniamo $\pi : x + y + 1 = 0$.*

c) *La proiezione ortogonale di A su r è il punto $H = r \cap \pi = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2)$.*

d) *La distanza cercata è $d(A,H) = \sqrt{\frac{3}{2}}$.* $\square$

Esercizio 3. Sono dati i punti $A = (0,1,0), B = (2,0,2)$ e il piano $\pi : x - 2y + z + 1 = 0$. Determinare:

a) L'equazione del piano α passante per l'origine e perpendicolare alla retta per A e B.

b) L'equazione del piano contenente A e B e perpendicolare al piano π.

c) Il punto del piano π piu' vicino ad A.

Soluzione. a) *Il vettore $\overrightarrow{AB} = (2,-1,2)$ è ortogonale al piano α, dunque α ha equazione del tipo $2x - y + 2z + k = 0$. Imponendo il passaggio per l'origine, otteniamo $k = 0$ e dunque $\alpha : 2x - y + 2z = 0$.*

b) *Imponiamo all'equazione generica del piano $ax+by+cz+d = 0$ le varie condizioni (passaggio per A, passaggio per B, ortogonalità con π):*

$$\begin{cases} b + d = 0 \\ 2a + 2c + d = 0 \\ a - 2b + c = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono tutte proporzionali alla soluzione $a = 1, b = 0, c = -1, d = 0$ dunque il piano ha equazione $x - z = 0$.

c) *Il punto cercato è la proiezione ortogonale di A su π. La retta per A ortogonale a π ha equazioni parametriche*

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

e sostituendo nell'equazione di π otteniamo il punto $H = (\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$. $\square$

Esercizio 4. Sono dati la retta $r : \begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 3x - z - 6 = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi : x - y + z = 0$.

a) Verificare che r non è ortogonale a π.

b) Trovare le equazioni cartesiane della retta r', proiezione ortogonale di r su π.

Soluzione. a) *I parametri direttori di r sono proporzionali a $(1, -2, 3)$ mentre i parametri di giacitura di π sono $(1, -1, 1)$: si ha $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ dunque retta e piano non sono paralleli.*

b) *La retta r' si ottiene come intersezione del piano π con il piano π', contenente r e perpendicolare a π. Per trovare π', scriviamo l'equazione del fascio ridotto di piani di asse r: $2x + y - 5 + k(3x - z - 6) = 0$, cioè:*

$$(2 + 3k)x + y - kz - 5 - 6k = 0.$$

Imponendo la perpendicolarità al piano π ($aa' + bb' + cc' = 0$) otteniamo $k = -\frac{1}{2}$, quindi $\pi' : x + 2y + z - 4 = 0$. Le equazioni cartesiane di r' sono dunque

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}.$$

$\square$

Esercizio 5. Sono dati i punti $A = (-1, 0, 1), B = (1, 1, 2), C = (0, 0, 2)$.

a) Verificare che A, B, C non sono allineati.

b) Determinare le equazioni parametriche della retta r passante per A e ortogonale a entrambi i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

c) Trovare le coordinate del punto D tale che $ABDC$ risulti un parallelogramma (fare attenzione all'ordine dei vertici).

d) Calcolare l'area del triangolo di vertici A, B, C.

Soluzione. Useremo il prodotto vettoriale. Si ha $\overrightarrow{AB} = (2, 1, 1), \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1)$. Calcoliamo il prodotto vettoriale

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1, -1, -1).$$

a) *I punti A, B, C sono allineati se e solo se i vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sono allineati, e questo avviene se e solo se il prodotto vettoriale $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ è nullo. Poiché $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, -1, -1)$ i punti A, B, C non sono allineati.*

b) *Sappiamo che il prodotto vettoriale $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, -1, -1)$ è ortogonale sia a $\overrightarrow{AB}$ che a $\overrightarrow{AC}$. Dunque $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ è un vettore direttore di r, e possiamo prendere $(1, -1, -1)$ come terna dei parametri direttori di r. In conclusione r ha equazioni parametriche*

$$r : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases} .$$

Potevamo procedere anche osservando che l'equazione del piano π per A, B e C è $x - y - z - 2 = 0$: allora la retta cercata è l'unica retta passante per A e perpendicolare al piano π.

c) *Deve risultare $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ dunque, passando alle coordinate: $D = B + C - A = (2, 1, 3)$.*

d) *Sappiamo che il modulo del prodotto vettoriale $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ uguaglia l'area del parallelogramma su $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Poiché l'area del triangolo è la metà dell'area del parallelogramma, otteniamo:*

$$\textit{Area del triangolo di vertici } A, B, C = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

Esercizio 6. Trovare le equazioni cartesiane della retta r contenuta nel piano $x + y + z = 0$, passante per l'origine e ortogonale alla retta per i punti $A = (1, 0, 2)$ e $B = (1, 1, 0)$.

Soluzione. Determiniamo i parametri direttori (l, m, n) della retta r. Poiché r è contenuta nel piano π, essa è in particolare parallela a π: applicando la condizione di parallelismo tra una retta e un piano, avremo $l + m + n = 0$. La retta deve poi essere ortogonale al vettore $\overrightarrow{AB}$ di coordinate $(0, 1, -2)$, dunque $m - 2n = 0$. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} l + m + n = 0 \\ m - 2n = 0 \end{cases} ,$$

si verifica che la terna (l, m, n) deve essere proporzionale a $(3, -2, -1)$. Siccome r passa per l'origine, le sue equazioni parametriche sono

$$r : \begin{cases} x = 3t \\ y = -2t \\ z = -t \end{cases} .$$

Potevamo anche procedere osservando che la retta cercata è intersezione del piano $\pi : x+y+z = 0$ con il piano π' passante per l'origine e perpendicolare al vettore $\overrightarrow{AB}$, che ha equazione $y-2z = 0$:

$$r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Si verifica che in effetti le due rette coincidono. □

Esercizio 7. È dato il piano $\pi : x - y + z = 0$.

a) Verificare che la retta $r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ è interamente contenuta in π.

b) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r' passante per l'origine, perpendicolare a r e contenuta in π.

c) Determinare equazioni parametriche della retta r'' passante per l'origine e perpendicolare a r e r'.

Soluzione. a) *Basta verificare che π contiene due punti distinti di r, ad esempio $(1, 2, 1)$ e $(0, 0, 0)$.*

b) *La retta r' è intersezione del piano π con il piano per l'origine ortogonale a r. Siccome i parametri direttori di r sono $(1, 2, 1)$ l'equazione di π' è $x + 2y + z = 0$. Dunque r' ha equazioni cartesiane*

$$r' : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases},$$

ed equazioni parametriche $r' : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$.

c) *r'' coincide con la retta per l'origine perpendicolare al piano π. Dunque* $r'' : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$, *con equazioni cartesiane* $r'' : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$. □

Esercizio 8. Sono dati i punti $A = (1, 1, 0), B = (2, 0, -3), C = (1, k, 2)$ dove k è un parametro, e sia T il triangolo di vertici A, B, C. Determinare i valori di k per i quali:

a) I tre punti sono allineati.

b) Il triangolo T è rettangolo.

c) Il triangolo T è isoscele sulla base BC.

d) Il piano per A, B, C passa per l'origine.

Soluzione. a) *Nessun valore di k: i vettori $\overrightarrow{AB} = (1, -1, -3)$ e $\overrightarrow{AC} = (0, k-1, 2)$ non sono mai paralleli, poiché*

$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & k-1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

per ogni valore di k.

b) *$k = -5$ oppure $k = -16$. Infatti, il triangolo formato dai vettori $\vec{v}, \vec{w}$ applicati nel punto P è rettangolo (in P) se e solo se $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$. Ora $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle = 0$ se e solo se $k = -5$, dunque T è rettangolo in A se e solo se $k = -5$. Analogamente, T è rettangolo in B se e solo se $\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = 0$. Poiché $\overrightarrow{BA} = (-1, 1, 3)$ e $\overrightarrow{BC} = (-1, k, 5)$ si ha che T è rettangolo in B se e solo se $k = -16$. Infine, si verifica che l'angolo al vertice C non è mai retto.*

c) *Basta imporre $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ da cui otteniamo i due valori $k = 1 + \sqrt{7}, 1 - \sqrt{7}$.*

d) *$k = \frac{7}{3}$. Il piano per A, B, C passa per l'origine se e solo se i punti A, B, C, O sono complanari. Il piano per O, A, B ha equazione $3x - 3y + 2z = 0$, e passa per $C = (1, k, 2)$ se e solo se $k = \frac{7}{3}$.*
□

Esercizio 9. Sono date le rette $r : \begin{cases} x - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$, $\quad r' : \begin{cases} x - y = 0 \\ z - 3 = 0 \end{cases}$. Dopo aver verificato che le rette sono sghembe, determinare:

a) Equazioni parametriche della retta per $P_0 = (1, 0, -1)$ ortogonale sia a r che a r'.

b) Equazioni parametriche della retta ortogonale e incidente sia a r che a r'.

c) La (minima) distanza di r da r'.

Trovare inoltre:

d) L'equazione del piano π_1 contenente r e parallelo a r'.

e) L'equazione del piano π_2 contenente r' e parallelo a r.

Infine, verificare che π_1 e π_2 sono piani paralleli, e che la distanza di π_1 da π_2 uguaglia la distanza di r da r' calcolata in c) .

Soluzione. I parametri direttori di r sono $(1, 2, 1)$ e quelli di r' sono $(1, 1, 0)$. Equazioni parametriche:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 3 \end{cases},$$

con parametri rispettivi t e s. Le rette non sono quindi parallele, e hanno intersezione vuota, come si verifica facilmente. Dunque sono sghembe.

a) *Una qualunque retta ortogonale a r e r' ha parametri direttori (l, m, n) tali che:*

$$\begin{cases} l + 2m + n = 0 \\ l + m = 0 \end{cases};$$

risolvendo, otteniamo che la terna (l, m, n) è proporzionale a $(1, -1, 1)$. La retta cercata passa per $(1, 0, -1)$, dunque ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}.$$

b) *Il punto mobile su r ha coordinate $A = (t, 2t, t)$ e quello su r' ha coordinate $A' = (s, s, 3)$. Dunque la retta per A e A' è incidente sia a r che a r', e ha vettore direttore $\overrightarrow{AA'}$ di coordinate $(s - t, s - 2t, 3 - t)$. Imponendo la perpendicolarita' a r e r' otteniamo:*

$$\begin{cases} s - 2t + 1 = 0 \\ 2s - 3t = 0 \end{cases},$$

da cui $s = 3, t = 2$. I punti corrispondenti sono dunque $A_0 = (2, 4, 2) \in r$ e $A'_0 = (3, 3, 3) \in r'$. Consideriamo la retta per A_0 e A'_0, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - t \\ z = 2 + t \end{cases};$$

tale retta incontra r in A_0 e r' in A'_0, ed è ortogonale a entrambe, ed è quindi la retta cercata.

c) *La distanza minima di r da r' è pari alla distanza di A_0 da A'_0 e vale:*

$$d(r, r') = d(A_0, A'_0) = \sqrt{3}.$$

d) *Un piano π_1 parallelo a entrambe le rette ha parametri di giacitura ortogonali sia a r che a r', dunque proporzionali a $(1, -1, 1)$; la sua equazione è del tipo $x - y + z + k = 0$, con $k \in \mathbf{R}$. Ora π_1 contiene la retta r se e solo se contiene un qualunque punto di r, ad esempio l'origine. In conclusione π_1 ha equazione $x - y + z = 0$.*

e) *Procedendo in modo analogo, troviamo che π_2 ha equazione $x - y + z - 3 = 0$.*
Infine, la distanza di π_1 da π_2 è $d(O, \pi_2) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, uguale al valore trovato in c) . $\square$

Esercizio 10. Si considerino il piano $\pi : x + y + z - 3 = 0$ e i suoi due punti $A = (1, 1, 1), B = (3, 0, 0)$.

a) Determinare l'equazione del piano α, perpendicolare a π e passante per A e B.

b) Determinare equazioni cartesiane dell'asse del segmento AB in π; cioe', dell'insieme dei punti di π equidistanti da A e B.

Soluzione. a) *L'equazione cartesiana di* α *è* $y-z = 0$, *che si ottiene imponendo al piano generico* $ax+by+cz+d = 0$ *le condizioni richieste (passaggio per* A, *passaggio per* B, *ortogonalità a* π*):*

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 3a+d=0 \\ a+b+c=0 \end{cases}$$

Risolvendo, si trova $a = 0, b = 1, c = -1, d = 0$.

b) *L'asse cercato è la retta* r *contenuta nel piano* π *e perpendicolare al segmento* AB, *ed è l'intersezione del piano* π *con il piano* π_1 *passante per il punto medio* $M = (2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *di* AB, *e perpendicolare al segmento* AB. *Dunque* π_1 *ha equazione* $2x-y-z-3 = 0$ *e l'asse ha equazioni cartesiane:*

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}.$$

□

Esercizio 11. Dati il piano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e la retta $r : \begin{cases} a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases}$, enunciare (e dimostrare) una condizione necessaria e sufficiente sul determinante della matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ affinché il piano e la retta abbiano un'unica intersezione.

Soluzione. L'intersezione del piano con la retta è data dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \\ a''x+b''y+c''z+d''=0 \end{cases},$$

con matrice dei coefficienti A. *L'intersezione si riduce a un punto se e solo se il sistema ammette un'unica soluzione: per il teorema di Cramer, ciò avviene se e solo se* $\det A \neq 0$. □

2 Circonferenze

Esercizio 12. Si considerino i punti $P_1 = (0,1), P_2 = (0,-1), P_3 = (2,3)$.
a) Determinare l'equazione della circonferenza γ passante per i tre punti.
b) Determinare le equazioni delle rette parallele a $x + y = 0$ e tangenti a γ .
c) Determinare l'equazione della retta tangente alla circonferenza γ nel suo punto $(0,1)$.
d) Il punto $(\dfrac{13}{2}, 0)$ è interno o esterno a γ?

Soluzione. a) *L'asse di P_1P_2 è $y = 0$ mentre l'asse di P_2P_3 è $x + 2y - 3 = 0$. Dunque il centro (intersezione degli assi) ha coordinate $C = (3,0)$ e il raggio vale $\sqrt{10}$. L'equazione di γ è:*

$$x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0.$$

b) *La retta generica parallela a $x+y = 0$ ha equazione $r : x+y+k = 0$; la condizione di tangenza impone $d(C,r) = \sqrt{10}$, dunque $\dfrac{|k+3|}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}$. Otteniamo due soluzioni: $k = -3 + \sqrt{20}, k = -3 - \sqrt{20}$. Le rette cercate sono due, di equazioni*

$$x + y - 3 + \sqrt{20} = 0, \quad x + y - 3 - \sqrt{20} = 0.$$

c) *La retta tangente passa per $P = (0,1)$ ed è ortogonale al raggio, quindi ortogonale al vettore $\overrightarrow{CP} = (3,-1)$. Otteniamo l'equazione*

$$3x - y + 1 = 0.$$

d) *Il punto è esterno alla circonferenza perché la sua distanza dal centro vale $\frac{7}{2}$, che è maggiore del raggio $\sqrt{10}$.* □

Esercizio 13. Data la retta $r : x - 2y = 0$ e il punto $A = (3,0)$, determinare:
a) L'equazione della circonferenza di centro A tangente a r.
b) La proiezione ortogonale di A su r e le coordinate del punto A', simmetrico del punto A rispetto a r.
c) Le coordinate dei punti P di r tali che il triangolo di vertici O, A, P abbia area 3.

Soluzione. a) *Il raggio uguaglia la distanza di A da r, che è $\frac{3}{\sqrt{5}}$. Equazione della circonferenza: $(x-3)^2 + y^2 = \dfrac{9}{5}$, cioè*

$$x^2 + y^2 - 6x + \frac{36}{5} = 0.$$

b) *La retta s per A ortogonale a r ha equazione $2x+y-6=0$ e l'intersezione di r e s (proiezione ortogonale di A su r) è il punto $M = (\frac{12}{5}, \frac{6}{5})$. Notiamo che M è il punto medio del segmento AA': esplicitando tale condizione, otteniamo che $A' = (\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$.*

c) *Il punto generico su r ha coordinate $(2t, t)$. L'area del triangolo vale $\frac{3}{2}|t|$, e vale 3 per $t = 2$ e $t = -2$. Otteniamo i punti $(4, 2), (-4, -2)$.* $\square$

Esercizio 14. Si considerino i punti $A = (2, 0), B = (0, -4)$. Determinare:

a) Le equazioni delle circonferenze di raggio 5 passanti per A e B.

b) L'equazione della circonferenza di raggio minimo passante per A e B.

Soluzione. a) *Il punto medio di AB è $M = (1, -2)$. L'equazione dell'asse di AB e' $s : x + 2y + 3 = 0$. Il centro delle circonferenze cercate e' su s, e ha coordinate $C = (-2t - 3, t)$ con $t \in \mathbf{R}$. Imponendo $d(A, C)^2 = 25$ otteniamo:*

$$5t^2 + 20t + 25 = 25$$

da cui $t = 0, -4$ e i due centri $C_1 = (-3, 0), C_2 = (5, -4)$. Equazioni delle due circonferenze:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &: x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0 \\ \mathcal{C}_2 &: x^2 + y^2 - 10x + 8y + 16 = 0 \end{aligned}$$

b) *Il raggio è minimo quando il segmento AB è un diametro, e il centro coincide con il punto medio M di AB. Dunque il centro è $M = (1, -2)$ e il raggio vale $\frac{1}{2}d(A, B) = \sqrt{5}$. L'equazione è:*

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5.$$

$\square$

3 Sfere

Esercizio 15. a) Scrivere l'equazione della sfera σ di centro $C = (2, 0, -1)$ e raggio $\sqrt{5}$.

b) Stabilire se il punto $P_0 = (3, 1, 1)$ è interno o esterno alla sfera σ.

c) Determinare il punto della sfera più lontano dall'origine.

Soluzione. a) $(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 5$, *ovvero* $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2z = 0$.

b) $d(P_0, C) = \sqrt{6} > \sqrt{5}$ *dunque P_0 è esterno a σ.*

c) *Osserviamo che la sfera contiene l'origine; il punto cercato P è dunque il secondo estremo del diametro contenente l'origine. Poiché il centro C deve essere il punto medio di OP, otteniamo facilmente che $P = (4, 0, -2)$.* $\square$

Esercizio 16. Verificare che l' equazione $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ rappresenta una sfera dello spazio. Quindi:

a) Calcolare le coordinate del centro e il raggio di σ.

b) Determinare l'equazione del piano tangente alla sfera nel suo punto $A = (2, 1, 3)$.

Soluzione. a) *L'equazione si riscrive $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + z^2 = 25$ da cui il centro è $(2, -3, 0)$ e il raggio è 5.*

b) *Il piano cercato è ortogonale al vettore $\overrightarrow{CA} = (0, 4, 3)$ e passa per A. Dunque la sua equazione è $4y + 3z - 13 = 0$.* $\square$

Esercizio 17. Sono dati i punti $O = (0, 0, 0), A = (1, 0, 0), B = (0, 1, 0)$.

a) Determinare le equazioni delle sfere di raggio 1 passanti per i tre punti.

b) Determinare l'equazione della sfera di raggio minimo passante per i tre punti.

c) Determinare infine l'equazione della sfera di centro l'origine e tangente al piano $\pi : x - y + 3z - 6 = 0$.

Soluzione. a) *L'equazione della sfera generica è $\sigma : x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d = 0$. Imponendo il passaggio per i tre punti otteniamo:*

$$d = 0, a = b = -1.$$

Dunque ci sono ∞^1 sfere per i tre punti, di equazione $\sigma : x^2 + y^2 + z^2 - x - y + cz = 0$, dove $c \in \mathbf{R}$. Il raggio vale $\frac{1}{2}\sqrt{2 + c^2}$, e assume il valore 1 se e solo se $c^2 = 2$, cioè per $c = \sqrt{2}$ e $c = -\sqrt{2}$. Dunque abbiamo due sfere, di equazioni:

$$\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 - x - y + \sqrt{2}z = 0, \quad \sigma_2 : x^2 + y^2 + z^2 - x - y - \sqrt{2}z = 0.$$

b) *Il raggio minimo si ha quando $c = 0$ e ha valore $\frac{\sqrt{2}}{2}$; in tal caso il centro sta sul piano contenente i tre punti, che ha equazione $z = 0$. Si ottiene la sfera $x^2 + y^2 + z^2 - x - y = 0$.*

c) *Per la condizione di tangenza, la sfera cercata avrà raggio pari alla distanza del centro (l'origine) dal piano π. Tale distanza vale $\frac{6}{\sqrt{11}}$, e l'equazione della sfera è $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{36}{11}$.* $\square$