Corso di Geometria 2011-12
Meccanica, Elettrotecnica
Esercizi 11

Esercizio 1. Scrivere la matrice canonica di ciascuna delle seguenti trasformazioni lineari del piano:

a) Rotazione di angolo $\dfrac{2\pi}{3}$.

b) Rotazione di angolo $\dfrac{2\pi}{3}$ seguita dalla riflessione attorno a $x - y = 0$.

c) Riflessione attorno a $x - y = 0$ seguita dalla rotazione di angolo $\dfrac{2\pi}{3}$.

d) Proiezione ortogonale sulla retta $2x - y = 0$.

e) Riflessione attorno alla retta $2x - y = 0$.

Quali delle matrici trovate risultano ortogonali?

Esercizio 2. a) Scrivere la matrice canonica M della rotazione di angolo $\theta = \pi/3$; calcolare inoltre M^{-1} e M^6.

b) La matrice $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ è la matrice canonica della riflessione attorno a una retta r passante per l'origine. Determinare l'equazione di r.

Esercizio 3. Scrivere le formula del cambiamento di coordinate da $\mathcal{R} = (O; x, y)$ a $\mathcal{R}' = (O; X, Y)$ se la nuova origine O' ha coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{R}$ e gli assi X, Y si ottengono ruotando gli assi x, y di un angolo $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$. Esprimere il cambiamento di coordinate inverso con un'opportuna matrice T di ordine 3 tale che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Diagonalizzare ciascuna delle matrici simmetriche seguenti, trovando in ciascun caso una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $M^tAM = D$. Possiamo fare in modo che M sia una rotazione (cioè, $|M| = 1$)?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Determinare quali delle seguenti forme quadratiche sono definite positive, e quali sono indefinite.

a) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + 4xy.$

b) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 9y^2 + 6xy.$

c) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 5y^2 + 4xy.$

d) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6x^2 + 6y^2 - 2xy.$

In ciascun caso, determinare una rotazione degli assi in modo che, nel nuovo riferimento $(O; X, Y)$, q assuma forma diagonale: $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda X^2 + \mu Y^2$ (usare il calcolo fatto nell'esercizio precedente).

Esercizio 6. Ridurre a forma canonica la conica $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$. Determinare le coordinate del centro di simmetria (se la conica è a centro) e le equazioni degli assi.

Esercizio 7. Ridurre a forma canonica la conica $x^2 + 9y^2 + 6xy + 6x - 2y + 1 = 0$.

Esercizio 8. Ridurre a forma canonica le seguenti coniche:

a) $x^2 + y^2 + 4xy + 1 = 0$.
b) $x^2 + y^2 + 4xy + 6x + 6y + 6 = 0$.
c) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y - 3 = 0$.

Disegnare la conica c) nel riferimento $(O; x, y)$.

Esercizio 9. Ridurre a forma canonica e disegnare le seguenti coniche (non occorre applicare il teorema di riduzione, basta completare i quadrati).

a) $x^2 + 4y^2 + 2x - 3 = 0$.
b) $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 2 = 0$.

Esercizio 10. Calcolare gli invarianti I_1, I_2, I_3 e classificare ciascuna delle seguenti coniche.

a) $x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y = 0$
b) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + x + 2y + 1 = 0$
c) $x^2 + 6xy + y^2 - 3 = 0$
d) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$
e) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x = 0$
f) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$
g) $4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y = 0$

Esercizio 11. Classificare la conica $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ al variare di a, b, c.

Esercizio 12. Classificare la conica

$$\mathcal{C}_k : x^2 + ky^2 + 6xy - 2x + 2y = 0.$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$. Per quali valori di k la conica ha un centro di simmetria? Per quali valori di k è un'ellisse a punti reali?

Esercizio 13. Classificare la conica

$$\gamma_k : x^2 + 9y^2 + 2kxy + 2x + 2y = 0$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$. Determinare per quali valori di k la conica possiede un centro di simmetria $C_k = (x_k, y_k)$, e calcolare $\lim_{k\to\infty} C_k$ (se tale limite esiste).