Corso di Geometria 2011-12
Meccanica, Elettrotecnica
Esercizi 11: soluzioni

Esercizio 1. Scrivere la matrice canonica di ciascuna delle seguenti trasformazioni lineari del piano:

a) Rotazione di angolo $\dfrac{2\pi}{3}$.

b) Rotazione di angolo $\dfrac{2\pi}{3}$ seguita dalla riflessione attorno a $x-y=0$.

c) Riflessione attorno a $x-y=0$ seguita dalla rotazione di angolo $\dfrac{2\pi}{3}$.

d) Proiezione ortogonale sulla retta $2x-y=0$.

e) Riflessione attorno alla retta $2x-y=0$.

Quali delle matrici trovate risultano ortogonali?

Soluzione. a) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. *b)* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

d) La matrice è data dal prodotto uu^t con $u = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dunque la matrice è $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

e) La matrice è data da $2A-I$ dove A è la matrice della proiezione ortogonale trovata in d). Si ottiene $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Le matrici sono tutte ortogonali, con l'eccezione della proiezione ortogonale in d).

Esercizio 2. a) Scrivere la matrice canonica M della rotazione di angolo $\theta = \pi/3$; calcolare inoltre M^{-1} e M^6.

b) La matrice $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ è la matrice canonica della riflessione attorno a una retta r passante per l'origine. Determinare l'equazione di r.

Soluzione. a) $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. *Si ha* $M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *poiché* M *è ortogonale. La matrice* M^6 *è associata alla rotazione di angolo* $6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi$. *Dunque* $M^6 = I$.
b) La retta cercata coincide con l'autospazio della matrice associato all'autovalore 1. *La retta è dunque* $x - 2y = 0$.

Esercizio 3. Scrivere le formula del cambiamento di coordinate da $\mathcal{R} = (O; x, y)$ a $\mathcal{R}' = (O'; X, Y)$ se la nuova origine O' ha coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{R}$ e gli assi X, Y si ottengono ruotando gli assi x, y di un angolo $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$. Esprimere il cambiamento di coordinate inverso con un'opportuna matrice T di ordine 3 tale che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. La matrice è $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Esercizio 4. Diagonalizzare ciascuna delle matrici simmetriche seguenti, trovando in ciascun caso una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $M^t A M = D$. Possiamo fare in modo che M sia una rotazione (cioè, $|M| = 1$)?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. a) Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
b) Matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$: $M = \dfrac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$.
c) Matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$: $M = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

d) Matrice $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$*:* $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Cambiando (eventualmente) segno ad uno dei due vettori della base ortonormale di autovettori trovata, è sempre possibile fare in modo che M sia una matrice ortogonale. $\square$

Esercizio 5. Determinare quali delle seguenti forme quadratiche sono definite positive, e quali sono indefinite.

a) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 + 4xy.$

b) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 9y^2 + 6xy.$

c) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 5y^2 + 4xy.$

d) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6x^2 + 6y^2 - 2xy.$

In ciascun caso, determinare una rotazione degli assi in modo che, nel nuovo riferimento $(O; X, Y)$, q assuma forma diagonale: $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda X^2 + \mu Y^2$ (usare il calcolo fatto nell'esercizio precedente).

Soluzione. a) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -X^2 + 3Y^2$*. Rotazione (di $\pi/4$) definita da* $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$*, nel senso che* $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$*. q è indefinita.*

b) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 10Y^2$*. Rotazione definita da* $M = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$*, q è semi-definita positiva.*

c) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X^2 + 6Y^2$*. Rotazione:* $M = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$*, q è definita positiva.*

d) $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5X^2 + 7Y^2$*. Rotazione:* $M = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$*, q è definita positiva.* $\square$

Esercizio 6. Ridurre a forma canonica la conica $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x - 4y - 10 = 0$. Determinare le coordinate del centro di simmetria (se la conica è a centro) e le equazioni degli assi.

Soluzione. La matrice della conica è:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & -10 \end{pmatrix}, \quad \textit{con parte principale} \quad Q = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix},$$

quindi $|A| = -288, |Q| = 24 > 0$. *Gli autovalori di* Q *sono* $\lambda = 4, \mu = 6$ *e per il teorema di riduzione la forma canonica è del tipo*

$$4X^2 + 6Y^2 + p = 0.$$

La conica è dunque un'ellisse (eventualmente degenere, o a punti immaginari). La matrice nel riferimento $(O'; X, Y)$ *è* $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ *e applicando il teorema di invarianza* ($|A| = |A'|$) *si ottiene* $p = -12$. *Dunque la forma canonica è:*

$$4X^2 + 6Y^2 - 12 = 0, \quad \textit{ovvero} \quad \frac{X^2}{3} + \frac{Y^2}{2} = 1.$$

Il centro è $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. *Gli assi di simmetria sono paralleli agli autospazi della matrice* Q, *e passano per il centro. Dunque gli assi hanno equazione* $x + y - 1 = 0, x - y = 0$. $\square$

Esercizio 7. Ridurre a forma canonica la conica $x^2 + 9y^2 + 6xy + 6x - 2y + 1 = 0$.

Soluzione. Matrici: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$. *Si ha* $|A| = -100, |Q| = 0$. *Procedendo come nell'esercizio precedente si vede che la conica è una parabola di equazione canonica*

$$Y^2 = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}X$$

(entrambi i segni vanno bene). $\square$

Esercizio 8. Ridurre a forma canonica le seguenti coniche:

a) $x^2 + y^2 + 4xy + 1 = 0$.
b) $x^2 + y^2 + 4xy + 6x + 6y + 6 = 0$.
c) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 2y - 3 = 0$.

Disegnare la conica c) nel riferimento $(O; x, y)$.

Soluzione. a) Iperbole di equazione canonica $-X^2 + 3Y^2 + 1 = 0$.
b) Iperbole degenere $-X^2 + 3Y^2 = 0$.
c) Parabola degenere $2Y^2 + r = 0$ *per un opportuno* $r \in \mathbf{R}$. *Risulta che la conica è una coppia di rette parallele:* $(x + y + 3)(x + y - 1) = 0$. $\square$

Esercizio 9. Ridurre a forma canonica e disegnare le seguenti coniche (non occorre applicare il teorema di riduzione, basta completare i quadrati).

a) $x^2 + 4y^2 + 2x - 3 = 0$.
b) $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 2 = 0$.

Soluzione. a) Risulta $x^2 + 4y^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 + 4y^2 - 4 = 0$. *Con la traslazione*

$$\begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y \end{cases}$$

la conica (ellisse) assume forma canonica $X^2 + 4Y^2 - 4 = 0$ *ovvero*

$$\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1.$$

b) Completando i quadrati: $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 2 = (x+2)^2 - 2(y+2)^2 + 2$ *e ponendo* $\begin{cases} X = x + 2 \\ Y = y + 2 \end{cases}$ *otteniamo la forma canonica*

$$X^2 - 2Y^2 + 2 = 0.$$

La conica è un'iperbole. $\square$

Esercizio 10. Calcolare gli invarianti I_1, I_2, I_3 e classificare ciascuna delle seguenti coniche.

a) $x^2 + 3xy + 2y^2 + x + 2y = 0$
b) $3x^2 + 2xy + 3y^2 + x + 2y + 1 = 0$
c) $x^2 + 6xy + y^2 - 3 = 0$
d) $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8 = 0$
e) $x^2 + 2xy + y^2 + 4x = 0$
f) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x + 2 = 0$
g) $4x^2 + 4xy + y^2 + 2x + y = 0$

Soluzione. Ricordiamo che $I_1 = \operatorname{tr} Q, I_2 = \det Q, I_3 = \det A$.
a) Risulta $I_1 = 3, I_2 = -\frac{1}{4}, I_3 = 0$. *Poiché* $I_2 < 0$ *e* $I_3 = 0$ *la conica è un'iperbole degenere.*
b) $I_1 = 6, I_2 = 8, I_3 = \frac{21}{4}$. *Poiché* $I_2 > 0$ *la conica è un'ellisse (eventualmente degenere o immaginaria). Ma* $I_3 I_1 > 0$*, dunque si ha un'ellisse immaginaria.*
c) $I_1 = 2, I_2 = -8, I_3 = 24$. *Si ha* $I_2 < 0$ *e* $I_3 \neq 0$*, dunque è un' iperbole.*
d) $I_1 = 6, I_2 = 8, I_3 = -64$. *Si ha* $I_2 > 0$ *e* $I_3 I_1 < 0$*: ellisse.*
e) $I_1 = 2, I_2 = 0, I_3 = -4$. *Si ha* $I_2 = 0$ *e* $I_3 \neq 0$*: parabola.*
f) $I_1 = 3, I_2 = 1, I_3 = 0$*: ellisse degenere (punto).*

g) Si ha $I_2 = I_3 = 0$: parabola degenere. $\square$

Esercizio 11. Classificare la conica $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$ al variare di a, b, c non tutti nulli.

Soluzione. La matrice della conica è $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con parte principale $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. Si ha $|A| = 0$ per ogni a, b, c (la conica è sempre degenere) e $|Q| = ac - b^2$. Dunque:

$$\begin{cases} \text{ellisse degenere (punto) se } ac - b^2 > 0 \\ \text{iperbole degenere (coppia di rette incidenti) se } ac - b^2 < 0 \\ \text{retta contata due volte se } ac - b^2 = 0 \end{cases}$$

Infatti, se $ac - b^2 = 0$ il rango della matrice A vale 1, e per il teorema di riduzione la forma canonica è del tipo $\mu Y^2 = 0$, con $\mu \neq 0$. $\square$

Esercizio 12. Classificare la conica

$$\mathcal{C}_k : x^2 + ky^2 + 4xy + 2x + 2y - 1 = 0$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$. Per quali valori di k la conica ha un centro di simmetria?

Soluzione. Un calcolo mostra che $|A| = -2k+7$, che si annulla solo quando $k = \frac{7}{2}$, e $|Q| = k-4$. Dunque gli invarianti sono $I_1 = k+1, I_2 = k-4, I_3 = -2k+7$. Abbiamo il seguente schema:

– *se $k < 4$ e $k \neq \frac{7}{2}$: iperbole ($I_2 < 0, I_3 \neq 0$).*

– *se $k = \frac{7}{2}$: iperbole degenere.*

– *se $k = 4$: parabola.*

– *se $k > 4$: ellisse (poiché $I_2 > 0$ e $I_3 I_1 < 0$).*

La conica ha centro di simmetria per $|Q| \neq 0$, cioè per $k \neq 4$. $\square$

Esercizio 13. Classificare la conica

$$\gamma_k : x^2 + 9y^2 + 2kxy + 2x + 2y = 0$$

al variare di $k \in \mathbf{R}$. Determinare per quali valori di k la conica possiede un centro di simmetria $C_k = (x_k, y_k)$, e calcolare $\lim_{k\to\infty} C_k$ (se tale limite esiste).

Soluzione. Un calcolo mostra che $|A| = 2k - 10, |Q| = 9 - k^2$. Invarianti:

$$I_1 = 2, I_2 = 9 - k^2, I_3 = 2k - 10.$$

Si ha $I_2 > 0$ per $k \in (-3,3)$, e $I_3 > 0$ per $k > 5$. Per $k = \pm 3$ abbiamo $I_2 = 0$ e $I_3 \neq 0$, dunque una parabola. Alla fine otteniamo il seguente schema:

- *se $k < -3$: iperbole.*
- *se $k = \pm 3$: parabola.*
- *se $-3 < k < 3$: ellisse ($I_2 > 0$ e $I_3 I_1 < 0$).*
- *se $k > 3$ e $k \neq 5$: iperbole.*
- *se $k = 5$: iperbole degenere.*

La conica ha centro di simmetria per $|Q| \neq 0$, cioè per $k \neq \pm 3$. In tal caso le coordinate del centro sono:

$$x_k = \frac{k-9}{9-k^2}, \quad y_k = \frac{k-1}{9-k^2}.$$

Si vede facilmente che $\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k) = (0,0)$. Dunque il centro di simmetria tende verso l'origine quando $k \to \pm\infty$.