Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 1: soluzioni

Esercizio 1. Risolvere le seguenti equazioni lineari nelle incognite indicate, descrivendo in ciascun caso l'insieme delle soluzioni:
a) $x + 4y = 5$ nelle incognite x, y.
b) $x + 4y = 5$ nelle incognite x, y, z.
c) $x_1 + x_3 - 2x_4 = 0$ nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Soluzione. a) *Ponendo* $y = t$ *otteniamo* $x = 5 - 4t$ *dunque abbiamo* ∞^1 *soluzioni date da* $\begin{pmatrix} 5-4t \\ t \end{pmatrix}$ *con* $t \in \mathbf{R}$.

b) *Ponendo* $y = t$ *e* $z = s$ *abbiamo* ∞^2 *soluzioni:* $\begin{pmatrix} 5-4t \\ t \\ s \end{pmatrix}$ *con* $t, s \in \mathbf{R}$.

c) *È chiaro che l'equazione ammette* ∞^3 *soluzioni. Poniamo* $x_2 = t, x_3 = s, x_4 = u$ *e quindi* $x_1 = -s + 2u$. *Insieme delle soluzioni:* $\begin{pmatrix} -s+2u \\ t \\ s \\ u \end{pmatrix}$ *con* $t, s, u \in \mathbf{R}$. $\square$

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare $S : \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ nelle incognite x, y, z.

a) Quale delle seguenti terne: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è una soluzione di S?

b) Per quali valori del parametro $k \in \mathbf{R}$ la terna $\begin{pmatrix} k \\ k+2 \\ -2 \end{pmatrix}$ è una soluzione del sistema S?

Soluzione. a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *è una soluzione, mentre* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *no (non soddisfa la seconda equazione).*

b) *Unico valore:* $k = 1$. $\square$

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti matrici, stabilire se è a scalini oppure no:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. A_1 *e* A_3 *sono a scalini, mentre* A_2 *no.* $\square$

Esercizio 4. Risolvere i seguenti sistemi lineari a scalini:

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ 2z = 3 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_4 = 3 \end{cases}$$

In ciascun caso, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende.

Soluzione. S_1 *ammette l'unica soluzione* $\begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$. *Il sistema* S_2 *ha matrice completa*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo quattro variabili e tre pivot, dunque ∞^1 *soluzioni. La variabile non corrispondente alle colonne dei pivot è* x_2. *Possiamo prendere* x_2 *come variabile libera:* $x_2 = t$. *Risolvendo dal basso otteniamo*

$$\mathrm{Sol}(S_2) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - 2t \\ t \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R} \right\}.$$

$\square$

Esercizio 5. Si considerino le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando l'algoritmo di Gauss, ridurre ciascuna delle matrici A_i a una matrice a scalini $\tilde{A}_i$.

Soluzione. Matrice A_1: con l'operazione $R_2 \to R_2 - R_1$ si riduce a $\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matrice A_2: con le operazioni $R_1 \leftrightarrow R_2, R_3 \to R_3 - R_1, R_3 \to R_3 - R_2$ si riduce a $\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Matrice A_3: con le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1, R_3 \to R_3 - R_1, R_3 \to R_3 - \frac{1}{3}R_2$ la matrice si riduce a $\tilde{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -\frac{11}{3} \end{pmatrix}$.

Nota: la forma a scalini di una matrice non è unica e risposte diverse dalle precedenti, ma ugualmente corrette, sono possibili. Il numero dei pivot, pero', deve essere sempre lo stesso: 2 *per la matrice $\tilde{A}_1$ e* 3 *per le matrici $\tilde{A}_2, \tilde{A}_3$.* $\square$

Esercizio 6. Si considerino le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Usando l'algoritmo di Gauss, ridurre ciascuna delle matrici A_i a una matrice a scalini $\tilde{A}_i$.

Soluzione. Matrice A_1. Con le operazioni $R_1 \leftrightarrow R_2, R_3 \to R_3 - R_1, R_3 \to R_3 + R_2$ si riduce alla forma a scalini

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice A_2. Applicando in successione le operazioni: $R_2 \to R_2 - 2R_1$, $R_3 \to R_3 - 3R_1$, $R_4 \to R_4 - R_1$, $R_3 \to R_3 - R_2, R_4 \to R_4 - R_2$ si riduce alla forma a scalini

$$\tilde{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 7. Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y:

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende.

Soluzione. *S_1 ammette l'unica soluzione* $\begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$. *$S_2$ e S_3 risultano incompatibili.* □

Esercizio 8. Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y, z:

$$S_1 : \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} y - 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende. (Parte del lavoro è già stato fatto nell'esercizio 5).

Soluzione. *Utilizziamo la riduzione a scalini dell'esercizio 5. S_1 ha ∞^1 soluzioni* $\begin{pmatrix} \frac{5-t}{2} \\ t \\ -2 \end{pmatrix}$ *con $t \in \mathbf{R}$. Il sistema S_2 è incompatibile (l'ultimo pivot cade nella colonna dei termini noti). S_3 ammette l'unica soluzione* $\begin{pmatrix} 7/6 \\ 3/2 \\ -11/6 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 9. Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$S_1 : \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende. (Parte del lavoro è già stato fatto nell'esercizio 6).

Soluzione. Il sistema S_1 *ha* ∞^1 *soluzioni* $\begin{pmatrix} 2t \\ -t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$ *con* $t \in \mathbf{R}$. *Infatti, riducendo la sua matrice completa a una forma a scalini otteniamo la matrice (vedi Esercizio 6):*

$$\tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

che rappresenta il sistema equivalente

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -4x_4 = 0 \end{cases}$$

La ridotta $\tilde{A}_1$ *ha tre pivot e quattro incognite: dunque il sistema ammetterà* ∞^1 *soluzioni. Possiamo prendere come variabile libera* x_3 *(che non corrisponde alle colonne dei pivot). Ponendo* $x_3 = t$ *e risolvendo dal basso otteniamo le soluzioni cercate.*

Il sistema S_2 *ammette* ∞^2 *soluzioni* $\begin{pmatrix} -t+s-3 \\ 2t-3s+6 \\ t \\ s \end{pmatrix}$ *con* $t, s \in \mathbf{R}$. *Questo si può vedere utilizzando la matrice ridotta trovata nell'esercizio 6.* □

Esercizio 10. Si consideri l'insieme M costituito dalle terne $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ tali che $\alpha + \beta + \gamma = 8$ e $\alpha + \beta - \gamma = 0$.

a) Dimostrare che M è un insieme infinito, dipendente da un parametro reale.

b) Trovare le terne $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in M$ per la quali $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 32$.

c) Trovare la terna $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in M$ per la quale $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ assume il valore minimo.

Soluzione. a) $M = \begin{pmatrix} 4-t \\ t \\ 4 \end{pmatrix}$ *con* $t \in \mathbf{R}$. b) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2t^2 - 8t + 32$ *vale* 32 *per* $t = 0$

e $t=4$, *quindi otteniamo le terne* $\begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$. c) *Completando i quadrati, vediamo che* $2t^2-8t+32=2((t-2)^2+12)$ *assume il valore minimo per* $t=2$ *ottenendo la terna* $\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$. □

Esercizio 11. Date $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2&0\\0&4\end{pmatrix}$, trovare l'unica matrice X di tipo 2×2 tale che $2A+3X=4B$.

Soluzione. Risolvendo rispetto alla matrice incognita X *otteniamo:*

$$X=-\frac{2}{3}A+\frac{4}{3}B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-10&-4\\-6&14\end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 12. Decomporre la matrice $\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}$ nella somma di una matrice simmetrica e una matrice antisimmetrica.

Soluzione. $\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&5/2\\5/2&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1/2\\-1/2&0\end{pmatrix}$. □

Esercizio 13. Dati p numeri reali $r_1,\dots,r_p\in\mathbf{R}$, consideriamo la matrice A, di tipo $p\times p$, tale che $a_{ij}=(-1)^{i+j}r_ir_j$.

a) È vero che A è simmetrica?

b) Scrivere esplicitamente tale matrice se $r_1=1, r_2=2, r_3=3, r_4=4$.

Soluzione. a) *La matrice è simmetrica perché* $a_{ij}=a_{ji}$ *per ogni* i,j. b)

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\-2&4&-6&8\\3&-6&9&-12\\-4&8&-12&16\end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 14. Data la matrice $A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$:

a) Determinare tutte le matrici $X \in M(2,2,\mathbf{R})$ tali che $AX = 0$.
b) Determinare tutte le matrici $Y \in M(2,2,\mathbf{R})$ tali che $YA = 0$.

Soluzione. a) *Partendo dalla matrice generica* $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e imponendo* $AX = 0$, *si ottiene un sistema lineare nelle incognite* a, b, c, d *e si arriva alle matrici* $X = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ *con* $a, b \in \mathbf{R}$.
b) *Procedendo come in* a) *otteniamo le matrici* $Y = \begin{pmatrix} -2t & t \\ -2s & s \end{pmatrix}$ *con* $t, s \in \mathbf{R}$. $\square$

Esercizio 15. a) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ trovare (se possibile) una matrice $X \in M(2,2,\mathbf{R})$ tale che $AX = I$.
b) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ trovare (se possibile) una matrice $X \in M(2,2,\mathbf{R})$ tale che $AX = I$.

Soluzione. a) $X = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$ *ed è unica.* b) *Non esiste.* $\square$