Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 2

Esercizio 1. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

a) con lo sviluppo lungo la prima riga,
b) con lo sviluppo lungo la terza colonna,
c) con l'algoritmo di Gauss.

Esercizio 2. Dimostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolare la sua inversa.

Esercizio 3. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ (usare l'algoritmo di Gauss, facendo attenzione al numero degli scambi di riga).

Esercizio 4. Per ognuna delle seguenti matrici determinare, quando esiste, la sua inversa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Stabilire per quali valori di k la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1-k \\ 3 & k & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile.

Esercizio 6. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ -a & 0 & b & 0 \\ 0 & -c & 0 & d \end{pmatrix}$. Per quali valori di a, b, c, d tale matrice è invertibile?

Esercizio 7. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$, esprimendo il risultato come prodotto di tre binomi. Per quali valori di a, b, c la matrice è invertibile? (Semplificare il determinante con opportune operazioni elementari di riga).

Esercizio 8. È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Risolvere le seguenti equazioni matriciali nell'incognita $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, determinando in ciascun caso l'insieme delle soluzioni.

a) $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $AX = -X$

c) $AX = 2X$.

d) $AX = 2X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Trovare tutti i numeri $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che l'equazione $AX = \lambda X$ ammette soluzioni $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 9. È dato il sistema di tre equazioni in tre incognite $S : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$.

a) Usare il teorema di Cramer per concludere che S ammette un'unica soluzione.

b) Trovare la soluzione.

Esercizio 10. In questo esercizio, si assuma nota la seguente proprietà del prodotto di matrici: se A, B sono matrici, e il prodotto AB esiste, allora si ha sempre $(AB)^t = B^t A^t$.

a) Data una matrice quadrata A, dimostrare che AA^t è una matrice simmetrica. (Tenere presente che una matrice C è simmetrica se e solo se $C^t = C$).

b) Dimostrare che $\det(AA^t) \geq 0$ e si ha $\det(AA^t) = 0$ se e solo se $\det A = 0$.

Esercizio 11. È dato il vettore colonna $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

a) Calcolare il prodotto $X^t X$ (è una matrice 1×1, cioè un numero).

b) Calcolare il prodotto XX^t (è una matrice 3×3). Verificare inoltre che la matrice XX^t è simmetrica e ha determinante nullo.

Esercizio 12. a) Trovare una matrice quadrata, non nulla, di ordine 2, tale che $A^2 = O$.

b) Dimostrare che, se $A^2 = O$, allora $\det A = 0$.

c) Trovare una matrice A di ordine 2, diversa da O e da I, tale che $A^2 = A$.

d) Se $A^2 = A$, quali valori può assumere $\det A$?

Esercizio 13. a) Verificare che una matrice antisimmetrica di ordine due ha determinante positivo o nullo; inoltre, tale matrice ha determinante nullo se e solo se è nulla.

b) Dimostrare che ogni matrice antisimmetrica di ordine tre ha determinante nullo.

c) Dimostrare che ogni matrice antisimmetrica di ordine *dispari* ha determinante nullo (usare le identità $A^t = -A$ e $\det(A^t) = \det A$).

Esercizio 14. Sia M_k l'insieme delle matrici 3×3 aventi k elementi uguali a 1 e gli altri $9 - k$ elementi uguali a zero (si supponga $k = 0, 1, 2, ..., 9$).

a) Dimostrare che, se $A \in M_k$, con $k \leq 2$, allora $\det A = 0$.

b) Elencare tutte le matrici $A \in M_3$ aventi determinante non nullo.

c) Per quali altri valori di k si ha $\det A = 0$ per ogni $A \in M_k$?

Esercizio 15. Sia $\mathcal{N}$ l'insieme delle matrici 3×3 aventi la seguente proprietà: la somma degli elementi di una qualunque colonna è zero (ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$). Dimostrare che *ogni* matrice in $\mathcal{N}$ ha determinante nullo.

Esercizio 16. Dimostrare che, se m, n, p sono numeri *interi,* e $n \neq 0$, allora la matrice $\begin{pmatrix} m & \sqrt{2} \\ n & p \end{pmatrix}$ è invertibile.