Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 2: soluzioni

Esercizio 1. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$:

a) con lo sviluppo lungo la prima riga,
b) con lo sviluppo lungo la terza colonna,
c) con l'algoritmo di Gauss.

Soluzione. Il determinante vale 3. $\square$

Esercizio 2. Dimostrare che la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile e calcolare la sua inversa.

Soluzione. L'inversa è $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Esercizio 3. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ (usare l'algoritmo di Gauss, facendo attenzione al numero degli scambi di riga).

Soluzione. -154. $\square$

Esercizio 4. Per ognuna delle seguenti matrici determinare, quando esiste, la sua inversa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. $A_1^{-1} = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. *La matrice* A_2 *non è invertibile perché ha determinante nullo.* $A_3^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -a \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 5. Stabilire per quali valori di k la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1-k \\ 3 & k & 2 \end{pmatrix}$ è invertibile.

Soluzione. Il determinante vale $k^2 - 2k$ *e si annulla per* $k = 0$ *oppure* $k = 2$. *Dunque la matrice è invertibile se e solo se* $k \neq 0$ *e* $k \neq 2$. □

Esercizio 6. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ -a & 0 & b & 0 \\ 0 & -c & 0 & d \end{pmatrix}$. Per quali valori di a, b, c, d tale matrice è invertibile?

Soluzione. Il determinante vale $4abcd$. *Dunque la matrice è invertibile se e solo se* a, b, c, d *sono tutti diversi da zero.* □

Esercizio 7. Calcolare il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$, esprimendo il risultato come prodotto di tre binomi. Per quali valori di a, b, c la matrice è invertibile? (Semplificare il determinante con opportune operazioni elementari di riga).

Soluzione. Il determinante vale $(b-a)(c-a)(c-b)$. □

Esercizio 8. È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Risolvere le seguenti equazioni matriciali nell'incognita $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, determinando in ciascun caso l'insieme delle soluzioni.

a) $AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $AX = -X$

c) $AX = 2X$.

d) $AX = 2X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

e) Trovare tutti i numeri $\lambda \in \mathbf{R}$ tali che l'equazione $AX = \lambda X$ ammette soluzioni $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soluzione. a) *La soluzione è unica:* $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) *La soluzione è unica:* $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) *Si hanno* ∞^1 *soluzioni, date da* $X = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix}$ *con* $t \in \mathbf{R}$.

d) *Nessuna soluzione.*

e) *Gli unici valori di* λ *sono* $\lambda = 2$ *e* $\lambda = 3$. *Infatti, poiché* $X = IX$, *dove* I *è la matrice identità, l'equazione può essere scritta in questo modo:*

$$(A - \lambda I)X = O.$$

Questo è un sistema omogeneo di due equazioni in due incognite con matrice dei coefficienti $A - \lambda I$, *che ammette autosoluzioni se e solo se* $\det(A - \lambda I) = 0$, *cioè se e solo se* $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, *da cui i valori* $\lambda = 2, 3$. □

Esercizio 9. È dato il sistema di tre equazioni in tre incognite $S : \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \\ 3x + 2y + z = 6 \end{cases}$.

a) Usare il teorema di Cramer per concludere che S ammette un'unica soluzione.

b) Trovare la soluzione.

Soluzione. Il determinante della matrice dei coefficienti vale -2, *dunque* S *ha un'unica soluzione, data da* $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.□

Esercizio 10. In questo esercizio, si assuma nota la seguente proprietà del prodotto di matrici: se A, B sono matrici, e il prodotto AB esiste, allora si ha sempre $(AB)^t = B^t A^t$.

a) Data una matrice quadrata A, dimostrare che AA^t è una matrice simmetrica. (Tenere presente che una matrice C è simmetrica se e solo se $C^t = C$).

b) Dimostrare che $\det(AA^t) \geq 0$ e si ha $\det(AA^t) = 0$ se e solo se $\det A = 0$.

Soluzione. Si ha sempre $(AB)^t = B^t A^t$ *e* $(A^t)^t = A$. *Prendendo* $B = A^t$ *otteniamo:*

$$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t.$$

Quindi AA^t è uguale alla sua trasposta, dunque è simmetrica.

Per la seconda parte, ricordiamo che $\det(A^t) = \det A$. *Dalla formula di Binet:*

$$\det(AA^t) = \det A \cdot \det(A^t) = (\det A)^2 \geq 0,$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\det A = 0$. $\square$

Esercizio 11. È dato il vettore colonna $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

a) Calcolare il prodotto X^tX (è una matrice 1×1, cioè un numero).

b) Calcolare il prodotto XX^t (è una matrice 3×3). Verificare inoltre che la matrice XX^t è simmetrica e ha determinante nullo.

Soluzione. a) $X^tX = a^2 + b^2 + c^2$.

b) *Si ha*

$$XX^t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} (a\ b\ c) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{pmatrix}.$$

La matrice è evidentemente simmetrica poiché $ab = ba, ac = ca, bc = cb$. *Per dimostrare che il suo determinante è nullo, basta osservare che:*

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & c \\ ba & b^2 & bc \\ ca & cb & c^2 \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ ca & cb & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$\square$

Esercizio 12. a) Trovare una matrice quadrata, non nulla, di ordine 2, tale che $A^2 = O$.

b) Dimostrare che, se $A^2 = O$, allora $\det A = 0$.

c) Trovare una matrice A di ordine 2, diversa da O e da I, tale che $A^2 = A$.

d) Se $A^2 = A$, quali valori può assumere $\det A$?

Soluzione. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *oppure* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) *Se* $A^2 = 0$, *per la formula di Binet, si ha* $0 = \det(A^2) = (\det A)^2$ *da cui* $\det A = 0$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *oppure* $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

d) *Usando la formula di Binet:* $\det A = 0$ *oppure* $\det A = 1$. $\square$

Esercizio 13. a) Verificare che una matrice antisimmetrica di ordine due ha determinante positivo o nullo; inoltre, tale matrice ha determinante nullo se e solo se è nulla.

b) Dimostrare che ogni matrice antisimmetrica di ordine tre ha determinante nullo.

c) Dimostrare che ogni matrice antisimmetrica di ordine *dispari* ha determinante nullo (usare le identità $A^t = -A$ e $\det(A^t) = \det A$).

Soluzione. a) *La generica matrice antisimmetrica di ordine* 2 *si scrive* $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ *e ha determinante* $b^2 \geq 0$. *Il determinante è nullo se e solo se* $b = 0$, *cioè* $A = 0$.

c) *Poiché* $\det(A^t) = \det A$, *se la matrice è antisimmetrica si dovrà avere* $\det A = \det(-A) = (-1)^n \det A$, *dove* n *è l'ordine della matrice. Se* n *è dispari otteniamo dunque* $\det A = -\det A$ *cioè* $\det A = 0$. $\square$

Esercizio 14. Sia M_k l'insieme delle matrici 3×3 aventi k elementi uguali a 1 e gli altri $9 - k$ elementi uguali a zero (si supponga $k = 0, 1, 2, ..., 9$).

a) Dimostrare che, se $A \in M_k$, con $k \leq 2$, allora $\det A = 0$.

b) Elencare tutte le matrici $A \in M_3$ aventi determinante non nullo.

c) Per quali altri valori di k si ha $\det A = 0$ per ogni $A \in M_k$?

Soluzione. a) *Se* $A \in M_k$, *con* $k \leq 2$ *ci sarà sempre almeno una riga nulla, dunque* $\det A = 0$.

b) *Sono in tutto sei, e sono quelle matrici che hanno i tre* 1 *in righe e colonne diverse.*

c) *Risposta:* $k = 8, 9$. *Infatti, se* $k = 8, 9$ *ci saranno almeno due righe uguali, e il determinante è nullo. Se* $k = 3, 4, 5, 6, 7$ *è sempre possibile trovare una matrice di* M_k *con determinante non nullo.* $\square$

Esercizio 15. Sia $\mathcal{N}$ l'insieme delle matrici 3×3 aventi la seguente proprietà: la somma degli elementi di una qualunque colonna è zero (ad esempio $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$). Dimostrare che *ogni* matrice in $\mathcal{N}$ ha determinante nullo.

Soluzione. La matrice generica dell'insieme $\mathcal{N}$ *si scrive*

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ -a-d & -b-e & -c-f \end{pmatrix}.$$

Con le operazioni $R_3 \to R_3 + R_1$ e $R_3 \to R_3 + R_2$ osserviamo che il determinante di A uguaglia il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

che è nullo. $\square$

Esercizio 16. Dimostrare che, se m, n, p sono numeri *interi,* e $n \neq 0$, allora la matrice $\begin{pmatrix} m & \sqrt{2} \\ n & p \end{pmatrix}$ è invertibile.

Soluzione. Supponiamo per assurdo che la matrice non sia invertibile: allora il suo determinante è nullo, cioè $mp - n\sqrt{2} = 0$. Poiché $n \neq 0$ otteniamo:

$$\sqrt{2} = \frac{mp}{n},$$

e questo è impossibile perché $\sqrt{2}$ non è un numero razionale. $\square$