Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 3

Rango e teorema di Rouché-Capelli

Esercizio 1. Calcolare il rango di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & -a & 2a \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolare il rango di ciascuna delle seguenti matrici (nella prima, supporre $a \neq 0$):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ (usare l'algoritmo di Gauss).

Esercizio 4. Stabilire in ciascun caso se il sistema omogeneo indicato ammette autosoluzioni oppure no:

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}, \quad S_3 = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5. Discutere le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro k:

$$\begin{cases} 2x + ky = 2 \\ kx + 2y = k \\ x + kz = k \end{cases}$$

Esercizio 6. Discutere al variare di k, le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x - ky = 0 \\ x - kz = 0 \\ kx - kz = -1 \end{cases} .$$

Esercizio 7. Discutere, al variare di h, k, le soluzioni del sistema nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = h \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = k \end{cases}$$

Esercizio 8. a) Sia $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 2 & 2 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale. Calcolare il rango di A' al variare di k.

b) A' è la matrice completa di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite. Scrivere esplicitamente tale sistema e discutere le sue soluzioni al variare di k.

Esercizio 9. Sia A una matrice 3×7.

a) Supponiamo che $\mathrm{rk}A = 3$. È vero che il sistema omogeneo $AX = 0$ ammette autosoluzioni?

b) Supponiamo che $\mathrm{rk}A = 3$. È vero che il sistema $AX = B$ è compatibile per ogni $B \in \mathbf{R}^7$?

c) Supponiamo ora che $\mathrm{rk}A = 2$. Dimostrare che il sistema omogeneo $AX = 0$ ammette ∞^5 soluzioni.

Esercizio 10. Sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Verificare che $\mathrm{rk}A = 2$.

b) Verificare che $\text{rk}A' = 2$ (usare il metodo degli orlati).

c) Verificare che le colonne v_1, v_2, v_3 della matrice A' sono linearmente dipendenti, ed esprimere v_3 come combinazione lineare di v_1 e v_2.

Dipendenza e indipendenza lineare

Esercizio 11. Sono dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Calcolare le seguenti combinazioni lineari: $v_1 + 4v_3, 3v_1 - v_2 - v_3$.

b) È vero che i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti?

c) Calcolare il rango della matrice avente colonne v_1, v_2, v_3.

Esercizio 12. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ vettori di $\mathbf{R}^2$.

a) Verificare che v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

b) Esprimere, se possibile, v_3 come combinazione lineare di v_1, v_2.

Esercizio 13. È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che:

a) I vettori colonna di A sono linearmente dipendenti.

b) I vettori riga di A sono linearmente indipendenti.

Esercizio 14. Sia A una matrice *quadrata* $n \times n$. Dimostrare che, se i vettori colonna di A sono linearmente dipendenti, anche i vettori riga lo sono, e viceversa (usare il fatto che i vettori colonna sono linearmente indipendenti se e solo se il determinante di A è diverso da zero).

Esercizio 15. Sono dati i vettori $u = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Dimostrare che u e v sono linearmente indipendenti.

b) Trovare un vettore $w \in \mathbf{R}^3$ che non è combinazione lineare di u e v.

Esercizio 16. Sono dati i vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dello spazio $\mathbf{R}^3$.

a) Dimostrare che u, v, w sono linearmente indipendenti.

b) Esprimere il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di u, v, w.

c) Dimostrare, usando il teorema di Cramer, che ogni vettore di $\mathbf{R}^3$ è combinazione lineare di u, v, w.

Esercizio 17. È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire se i vettori colonna di A sono linearmente dipendenti o linearmente indipendenti.

b) Risolvere il sistema lineare omogeneo $AX = O$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

c) Trovare, se esiste, una relazione di dipendenza lineare tra i vettori colonna di A.

Esercizio 18. Sono dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$.

a) Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di v_1, v_2?

b) Quali condizioni dobbiamo imporre ai numeri a, b, c, d affinche' il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ sia combinazione lineare di v_1, v_2?