Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 3: soluzioni

Rango e teorema di Rouché-Capelli

Esercizio 1. Calcolare il rango di ciascuna delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ a & -a & 2a \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Rango $1, 2, 2, 1$ *rispettivamente.* $\square$

Esercizio 2. Calcolare il rango di ciascuna delle seguenti matrici (nella prima, supporre $a \neq 0$):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Rango $2, 3, 2$, *rispettivamente.* $\square$

Esercizio 3. Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ (usare l'algoritmo di Gauss).

Soluzione. Il rango vale 2. $\square$

Esercizio 4. Stabilire in ciascun caso se il sistema omogeneo indicato ammette autosoluzioni oppure no:

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}, \quad S_3 = \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \\ 2x + 3z = 0 \end{cases}$$

Soluzione. S_1: solo la soluzione nulla. S_2 ammette autosoluzioni: il numero delle incognite è maggiore del numero delle equazioni. S_3 ammette autosoluzioni: è quadrato e il determinante della matrice dei coefficienti è uguale a zero. □

Esercizio 5. Discutere le soluzioni del seguente sistema lineare nelle incognite x, y, z al variare del parametro k:

$$\begin{cases} 2x + ky = 2 \\ kx + 2y = k \\ x + kz = k \end{cases}$$

Soluzione. Matrice dei coefficienti: $A = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$. *Si ha* $\det A = k(2-k)(2+k)$ *dunque, se*

$k \notin \{0, 2, -2\}$ *il rango è* 3. *Si verifica che negli altri casi il rango è* 2. *Matrice completa:*

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 & 2 \\ k & 2 & 0 & k \\ 1 & 0 & k & k \end{pmatrix}.$$

Per $k \notin \{0, 2, -2\}$ *il rango è* 3. *Per* $k = 0$ *è ancora* 3, *mentre per* $k = 2, -2$ *le prime due righe sono dipendenti, dunque il rango è* 2. *Conclusione:*

- Se $k \neq 0, 2, -2$ la soluzione è unica,
- Se $k = 0$ il sistema è incompatibile,
- Se $k = 2, -2$ si hanno ∞^1 soluzioni. □

Esercizio 6. Discutere al variare di k, le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x - ky = 0 \\ x - kz = 0 \\ kx - kz = -1 \end{cases}.$$

Soluzione. *Matrice dei coefficienti* $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ 1 & 0 & -k \\ k & 0 & -k \end{pmatrix}$ *e matrice completa* $A' = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -k & -1 \end{pmatrix}$.
Si ha $\det A = k^2(k-1)$ *quindi* $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 3$ *se* $k \neq 0, 1$. *Se* $k = 0$ *il rango di* A *è* 1 *mentre quello di* A' *è* 2 *(sistema incompatibile), se* $k = 1$ *il rango di* A *è* 2 *mentre quello di* A' *è* 3 *(sistema incompatibile). Dunque:*

- Se $k \neq 0, 1$ si ha un'unica soluzione,
- Se $k = 0, 1$ il sistema è incompatibile.

Esercizio 7. Discutere, al variare di h, k, le soluzioni del sistema nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = h \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = k \end{cases}$$

Soluzione. *Rango di* A *uguale a* 3 *per ogni* h, k. *Rango di* A' *uguale a* 3 *se* $h = 0$ *e uguale a* 4 *se* $h \neq 0$. *Dunque:*

- Se $h = 0$ si hanno ∞^1 soluzioni (per ogni k),
- Se $h \neq 0$ il sistema è incompatibile.

Esercizio 8. a) Sia $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 2 & 2 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale. Calcolare il rango di A' al variare di k.

b) A' è la matrice completa di un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite. Scrivere esplicitamente tale sistema e discutere le sue soluzioni al variare di k.

Soluzione. a) *Il rango di* A' *è uguale a* 3 *per ogni* k *(vedi minore a est).*

b) *La matrice dei coefficienti è* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 2 & 2 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$*; calcolando il suo determinante vediamo che se* $k = 2$ *ha rango* 2 *mentre se* $k \neq 2$ *ha rango* 3. *Usando Rouche'-Capelli, concludiamo che:*

- Se $k = 2$ il sistema è incompatibile;
- se $k \neq 2$ il sistema è compatibile, e ha un'unica soluzione. □

Esercizio 9. Sia A una matrice 3×7.

a) Supponiamo che $\text{rk}A = 3$. È vero che il sistema omogeneo $AX = 0$ ammette autosoluzioni?

b) Supponiamo che $\text{rk}A = 3$. È vero che il sistema $AX = B$ è compatibile per ogni $B \in \mathbf{R}^3$?

c) Supponiamo ora che $\text{rk}A = 2$. Dimostrare che il sistema omogeneo $AX = 0$ ammette ∞^5 soluzioni.

Soluzione. a) *Si', perché il numero delle incognite è maggiore del numero delle equazioni (e quindi del rango).*

b) *Si': la matrice completa del sistema è* 3×8 *e contiene* A. *Se* $\text{rk}A = 3$ *allora anche* $\text{rk}A' = 3$ *e il sistema è compatibile.*

c) *Per il teorema di Rouche'-Capelli, le soluzioni sono* ∞^{n-r}, *dove* n *è il numero delle incognite (cioè* 7*), e* r *è il rango di* A *(che vale* 2*).*$\square$

Esercizio 10. Sono date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Verificare che $\text{rk}A = 2$.

b) Verificare che $\text{rk}A' = 2$ (usare il metodo degli orlati).

c) Verificare che le colonne v_1, v_2, v_3 della matrice A' sono linearmente dipendenti, ed esprimere v_3 come combinazione lineare di v_1 e v_2.

Soluzione. c) $v_3 = -v_1 + 2v_2$. $\square$

Dipendenza e indipendenza lineare

Esercizio 11. Sono dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Calcolare le seguenti combinazioni lineari: $v_1 + 4v_3, 3v_1 - v_2 - v_3$.

b) È vero che i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti?

c) Calcolare il rango della matrice avente colonne v_1, v_2, v_3.

Soluzione. a) $v_1 + 4v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, 3v_1 - v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) *La relazione di dipendenza lineare* $3v_1 - v_2 - v_3 = 0$ *mostra che i tre vettori sono linearmente dipendenti.*

c) $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = 2$, *pari al numero massimo di colonne linearmente indipendenti.* $\square$

Esercizio 12. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ vettori di $\mathbf{R}^2$.

a) Verificare che v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti.

b) Esprimere, se possibile, v_3 come combinazione lineare di v_1, v_2.

Soluzione. a) *Tre vettori di uno spazio vettoriale di dimensione* 2 *sono sempre linearmente dipendenti.*

b) $v_3 = 2v_1 - 2v_2$. $\square$

Esercizio 13. È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che:

a) I vettori colonna di A sono linearmente dipendenti.

b) I vettori riga di A sono linearmente indipendenti.

Soluzione. Il rango di A vale 2, *dunque le righe sono linearmente indipendenti e le colonne sono linearmente dipendenti.* $\square$

Esercizio 14. Sia A una matrice *quadrata* $n \times n$. Dimostrare che, se i vettori colonna di A sono linearmente dipendenti, anche i vettori riga lo sono, e viceversa (usare il fatto che i vettori colonna sono linearmente indipendenti se e solo se il determinante di A è diverso da zero).

Soluzione. Basta osservare che il determinante di una matrice è uguale a quello della sua trasposta. $\square$

Esercizio 15. Sono dati i vettori $u = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -3 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Dimostrare che u e v sono linearmente indipendenti.

b) Trovare un vettore $w \in \mathbf{R}^3$ che non è combinazione lineare di u e v.

Soluzione. a) *Il rango della matrice* $\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 8 & 18 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *vale* 2.

b) *Ad esempio,* $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Esercizio 16. Sono dati i vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ dello spazio $\mathbf{R}^3$.

a) Dimostrare che u, v, w sono linearmente indipendenti.

b) Esprimere il vettore $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare di u, v, w.

c) Dimostrare, usando il teorema di Cramer, che ogni vettore di $\mathbf{R}^3$ è combinazione lineare di u, v, w.

Soluzione. a) *Il determinante della matrice delle coordinate* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ *è diverso da zero.*

b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2u + v - w.$

c) *Il vettore generico* $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ *è combinazione lineare dei vettori* u, v, w *se e solo se il sistema lineare, nelle incognite* x, y, z*:*

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

è compatibile. La matrice dei coefficienti di tale sistema è A*, ed ha determinante diverso da zero. Dunque, per il teorema di Cramer, il sistema è compatibile e ammette una e una sola soluzione: di conseguenza ogni vettore di* $\mathbf{R}^3$ *si esprime, in modo unico, come combinazione lineare di* u, v, w. $\square$

Esercizio 17. È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Stabilire se i vettori colonna di A sono linearmente dipendenti o linearmente indipendenti.

b) Risolvere il sistema lineare omogeneo $AX = O$, dove $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

c) Trovare, se esiste, una relazione di dipendenza lineare tra i vettori colonna di A.

Soluzione. a) *I tre vettori colonna di A sono linearmente dipendenti perché* $\det A = 0$ *e quindi* $\mathrm{rk}A \leq 2$ *(in effetti, si ha* $\mathrm{rk}A = 2$*).*

b) *Il sistema omogeneo $AX = O$ ammette ∞^1 soluzioni, date da* $\{t \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbf{R}\}$.

c) *I coefficienti di una (eventuale) relazione di dipendenza lineare fra i vettori colonna di una matrice A sono dati da una (eventuale) soluzione non nulla del sistema omogeneo $AX = O$. Nel nostro caso, come visto in* b) *, tale soluzione non nulla esiste: dunque, detti v_1, v_2, v_3 i vettori colonna di A si avrà:*

$$-4v_1 + 3v_2 + v_3 = O,$$

che è la relazione cercata. $\square$

Esercizio 18. Sono dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$.

a) Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$ è combinazione lineare di v_1, v_2?

b) Quali condizioni dobbiamo imporre ai numeri a, b, c, d affinche' il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ sia combinazione lineare di v_1, v_2?

Soluzione. Iniziamo dalla parte b). Consideriamo le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *e* $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 3 & 0 & c \\ 1 & -1 & d \end{pmatrix}$.

Siccome $\mathrm{rk}A = 2$ *si avra' che l'ultima colonna di A' è combinazione lineare delle precedenti se e solo se* $\mathrm{rk}A' = \mathrm{rk}A = 2$. *Il minore* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *ha determinante diverso da zero: per il teorema* *degli orlati il rango di A' vale 2 se e solo se:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 3 & 0 & c \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 1 & -1 & d \end{vmatrix} = 0.$$

Otteniamo cosi' le condizioni:

$$\begin{cases} 3b - c = 0 \\ a - 3b + 2d = 0 \end{cases}$$

a) $k = 6$. $\square$