Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 4

Esercizio 1. Sono dati i seguenti sistemi lineari omogenei nelle incognite x, y, z:

$$S_1 : x - y + 2z = 0, \quad S_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}, \quad S_3 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ x - 7y + z = 0 \end{cases}, \quad S_4 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Determinare, in ciascun caso, una base del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ formato dalle soluzioni del sistema.

Esercizio 2. Sono dati i seguenti sistemi lineari omogenei nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$S_1 : x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Determinare, in ciascun caso, una base e la dimensione del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema.

Esercizio 3. Sono dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}$ dello spazio $\mathbf{R}^3$.

a) Per quali valori di k i tre vettori formano una base di $\mathbf{R}^3$?

b) Calcolare la dimensione del sottospazio $E = L[v_1, v_2, v_3]$ al variare di k.

c) Calcolare la dimensione del sottospazio $F = L[v_2, v_3]$ al variare di k.

Esercizio 4. Sia E il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ formato dalle soluzioni dell'equazione $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$, e sia F il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcolare la dimensione di E e la dimensione di F.

b) È vero che $F \subseteq E$?

c) È vero che $F = E$?

Esercizio 5. Sia W il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$ costituito da tutti i vettori tali che:

a) la seconda entrata è il doppio della prima;

b) la quarta entrata è la somma di tutte le altre.

Dimostrare che W è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ e trovare una sua base.

Esercizio 6. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare la dimensione del sottospazio W di $\mathbf{R}^3$ generato da tali vettori e trovare una base di W.

Esercizio 7. Siano W_1 e W_2 i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$:

$$W_1 = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \quad W_2 = L\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

a) È vero che $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in W_1$?

b) È vero che $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$?

c) Esistono vettori non nulli comuni a W_1 e W_2?

Esercizio 8. Stabilire se i vettori (riga) $v_1 = (1, 0, 2, -2), v_2 = (2, 0, 2, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 0, 1)$ di $\mathbf{R}^4$ sono linearmente indipendenti o no. È vero che (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbf{R}^4$? È possibile trovare un vettore v_4 tale che (v_1, v_2, v_3, v_4) risulti una base di $\mathbf{R}^4$?

Esercizio 9. Determinare tutti i valori del parametro $k \in \mathbf{R}$ per i quali l'insieme di vettori (riga) $\{(1, 2, k), (k, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

Esercizio 10. Si considerino i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Per quali valori di k i vettori sono linearmente indipendenti?

b) Calcolare, al variare di k, la dimensione del sottospazio E di $\mathbf{R}^3$ generato dai tre vettori.

c) Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k \end{pmatrix}$ appartiene a E?

Esercizio 11. Sia E il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a E?

Esercizio 12. Sono dati i vettori $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ dello spazio $\mathbf{R}^4$, e il sottospazio $E = L[v_1, v_2]$.

a) Spiegare perche' $E \neq \mathbf{R}^4$.

b) Trovare due vettori w_1, w_2, scelti opportunamente fra i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$, in modo tale che v_1, v_2, w_1, w_2 formino una base di $\mathbf{R}^4$.

Esercizio 13. Nello spazio $\mathbf{R}^4$ sono dati: il sottospazio E, generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, e il sottospazio F, di equazione $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

a) Trovare una base e la dimensione di E.

b) Trovare una base e la dimensione di F.

c) Trovare una base e la dimensione di $E \cap F$.

d) Dimostrare che $E + F = \mathbf{R}^4$.

Esercizio 14. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 2 & 2 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale.

a) Per quali valori di k le righe di A sono linearmente indipendenti?

b) Per quali valori di k l'ultima colonna è una combinazione lineare delle colonne precedenti?

c) Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} k \\ 5k \\ 8 \end{pmatrix}$ è una combinazione lineare delle colonne di A?

Esercizio 15. Sono dati i vettori v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, che assumeremo linearmente indipendenti. Poniamo $E = L[v_1, v_2]$ e $F = L[w_1, w_2, w_3]$.

a) Calcolare $\dim E, \dim F$.

b) Dimostrare che $E \cap F = \{O\}$.

Esercizio 16. In $\mathbf{R}^3$ sono dati: il sottospazio E, insieme delle soluzioni dell'equazione $x+y-z = 0$, e il sottospazio F, generato dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare una base di E.

b) Descrivere il sottospazio F con una o piu' equazioni.

c) Trovare una base del sottospazio $E \cap F$.

d) Trovare una base del sottospazio $E + F$.

Esercizio 17. Siano v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 vettori di uno spazio vettoriale V tali che $L[v_1, v_2, v_3] \subseteq L[w_1, w_2]$.

a) È vero che $\dim L[v_1, v_2, v_3] = 3$?

b) È vero che v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti?

c) È vero che il vettore $3v_1 - 2v_2$ si puo' scrivere come combinazione lineare di w_1, w_2?

Esercizio 18. Data la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, si consideri il sottoinsieme

$$E = \{X \in \mathbf{Mat}(2 \times 2) : XN = O\}.$$

a) Dimostrare che E è un sottospazio di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$.

b) Trovare una base di E e calcolare la sua dimensione.