Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 4: soluzioni

Esercizio 1. Sono dati i seguenti sistemi lineari omogenei nelle incognite x, y, z:

$$S_1 : x - y + 2z = 0, \quad S_2 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}, \quad S_3 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ x - 7y + z = 0 \end{cases}, \quad S_4 : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Determinare, in ciascun caso, una base del sottospazio di $\mathbf{R}^3$ formato dalle soluzioni del sistema.

Soluzione. Base di $\mathrm{Sol}(S_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. *Base di* $\mathrm{Sol}(S_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. *Base di* $\mathrm{Sol}(S_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Sol}(S_4) = \{O\}$. $\square$

Esercizio 2. Sono dati i seguenti sistemi lineari omogenei nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$S_1 : x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}.$$

Determinare, in ciascun caso, una base e la dimensione del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ formato dalle soluzioni del sistema.

Soluzione. $\mathrm{Sol}(S_1)$ *ha dimensione* 3*, una sua base è, ad esempio:* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\mathrm{Sol}(S_2)$ *ha dimensione* 2 *e una sua base è costituita da due soluzioni linearmente indipendenti.* $\square$

Esercizio 3. Sono dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\k\\-1\end{pmatrix}$ dello spazio $\mathbf{R}^3$.

a) Per quali valori di k i tre vettori formano una base di $\mathbf{R}^3$?

b) Calcolare la dimensione del sottospazio $E = L[v_1, v_2, v_3]$ al variare di k.

c) Calcolare la dimensione del sottospazio $F = L[v_2, v_3]$ al variare di k.

Soluzione. Matrice delle coordinate $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\2 & 0 & k\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}$. *Si ha* $\det A = 0$ *se e solo se* $k = 6$. *Dunque si ha una base se e solo se* $k \neq 6$.

b) *La dimensione di* E *vale* 3 *per* $k \neq 6$ *e* 2 *per* $k = 6$.

c) *I generatori di* F *sono linearmente indipendenti per ogni valore di* k. *Dunque* F *ha dimensione* 2 *per ogni valore di* k. $\square$

Esercizio 4. Sia E il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ formato dalle soluzioni dell'equazione $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$, e sia F il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

a) Calcolare la dimensione di E e la dimensione di F.

b) È vero che $F \subseteq E$?

c) È vero che $F = E$?

Soluzione. a) *Si vede subito che la dimensione di* E *vale* 3. *I tre vettori generatori di* F *sono linearmente indipendenti, perche' il rango della matrice*

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & -1\\1 & 1 & 0\\-3 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

è uguale a 3. *Dunque anche* F *ha dimensione* 3.

b) *È vero. Ciascuno dei tre generatori di* F *è soluzione dell'equazione che definisce* E*: dunque* E *contiene tutti i generatori di* F *e quindi contiene anche* F.

c) *È vero. Infatti,* F *è un sottospazio di* E*, e ha la stessa dimensione di* E*. Ne segue che necessariamente* $F = E$. $\square$

Esercizio 5. Sia W il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$ costituito da tutti i vettori tali che:

a) la seconda entrata è il doppio della prima;

b) la quarta entrata è la somma di tutte le altre.

Dimostrare che W è un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ e trovare una sua base.

Soluzione. Le richieste sul vettore generico $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ *sono:*

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 \\ x_4 = x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}.$$

Questo è un sistema omogeneo con ∞^2 *soluzioni:* $\begin{pmatrix} t \\ 2t \\ s \\ 3t+s \end{pmatrix}$. *Dunque il sottospazio* W *ha dimensione* 2 *con base* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 6. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare la dimensione del sottospazio W di $\mathbf{R}^3$ generato da tali vettori e trovare una base di W.

Soluzione. Il rango della matrice delle coordinate è 2*, dunque la dimensione di* W *è anch'essa* 2*. Una base è* (v_1, v_2)*. Potevamo anche osservare che* $v_3 = 2v_2, v_4 = -v_1 + v_2$ *e* v_1, v_2 *sono linearmente indipendenti.* □

Esercizio 7. Siano W_1 e W_2 i seguenti sottospazi di $\mathbf{R}^3$:

$$W_1 = L\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right], \quad W_2 = L\left[\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

a) È vero che $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \in W_1$?

b) È vero che $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$?

c) Esistono vettori non nulli comuni a W_1 e W_2?

Soluzione. a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*; dunque la risposta è affermativa.* b) *No.* c)

Equazione di $W_1 : x - y + 2z = 0$. *Equazione di* $W_2 : x + 4z = 0$. *Dunque le equazioni dell'intersezione* $W_1 \cap W_2$ *sono:*

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ x + 4z = 0 \end{cases}$$

che ammette ∞^1 *soluzioni, con base* $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$*: dunque la risposta è affermativa.*

Si poteva anche osservare che $\dim W_1 = \dim W_2 = 2$ *e* $\dim(W_1 + W_2) = 3$. *Dalla formula di Grassmann,* $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ *e quindi* $W_1 \cap W_2$ *contiene vettori non nulli.* □

Esercizio 8. Stabilire se i vettori (riga) $v_1 = (1, 0, 2, -2), v_2 = (2, 0, 2, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 0, 1)$ di $\mathbf{R}^4$ sono linearmente indipendenti o no. È vero che (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbf{R}^4$? È possibile trovare un vettore v_4 tale che (v_1, v_2, v_3, v_4) risulti una base di $\mathbf{R}^4$?

Soluzione. I vettori v_1, v_2, v_3 *sono linearmente indipendenti ma non formano una base di* $\mathbf{R}^4$*, poiché una base di* $\mathbf{R}^4$ *deve essere formata da quattro vettori. Basta prendere* $v_4 = e_1$ *(primo vettore della base canonica).* □

Esercizio 9. Determinare tutti i valori del parametro $k \in \mathbf{R}$ per i quali l'insieme di vettori (riga) $\{(1, 2, k), (k, 1, 0), (2, 1, 1)\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.

Soluzione. Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Si ha* $\det A = k^2 - 4k + 1$ *che si annulla per* $k = 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$. *Dunque i vettori formano una base se e solo se* $k \neq 2 + \sqrt{3}$ *e* $k \neq 2 - \sqrt{3}$. □

Esercizio 10. Si considerino i vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$.

a) Per quali valori di k i vettori sono linearmente indipendenti?

b) Calcolare, al variare di k, la dimensione del sottospazio E di $\mathbf{R}^3$ generato dai tre vettori.

c) Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k \end{pmatrix}$ appartiene a E?

Soluzione. b) *La dimensione di E è uguale al rango della matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix}$. *Il minore* $\begin{pmatrix} k & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *ha determinante non nullo per ogni k. Inoltre* $\det A = k(4-k^2)$, *che si annulla per* $k = 0, 2, -2$. *Dunque il rango vale 2 se $k = 0, 2, -2$ e vale 3 altrimenti. In conclusione*

$$\dim E = \begin{cases} 2, & se\ k \in \{0, 2, -2\} \\ 3, & se\ k \notin \{0, 2, -2\} \end{cases}$$

In particolare, i tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se $k \notin \{0, 2, -2\}$.

c) *Il vettore* $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k \end{pmatrix}$ *appartiene a E se e solo se*

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 2 & k & 0 \\ k & 2 & 0 \\ 1 & 0 & k \end{pmatrix} = \operatorname{rk} \begin{pmatrix} 2 & k & 0 & 2 \\ k & 2 & 0 & k \\ 1 & 0 & k & k \end{pmatrix},$$

che si verifica se e solo se $k \neq 0$. $\square$

Esercizio 11. Sia E il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a E?

Soluzione. $k = -3$. *Infatti i due generatori sono linearmente indipendenti; il vettore dato appartiene a E se e solo se*

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2,$$

che si verifica se e solo se $k = -3$ *(applicare il teorema degli orlati).* $\square$

Esercizio 12. Sono dati i vettori $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ dello spazio $\mathbf{R}^4$, e il sottospazio $E = L[v_1, v_2]$.

a) Spiegare perche' $E \neq \mathbf{R}^4$.

b) Trovare due vettori w_1, w_2, scelti opportunamente fra i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$, in modo tale che v_1, v_2, w_1, w_2 formino una base di $\mathbf{R}^4$.

Soluzione. a) *La dimensione di* E *vale* 2*, dunque* $E \neq \mathbf{R}^4$*.*

b) *Possiamo prendere* $w_1 = e_1, w_2 = e_2$*. Verificare che in effetti* v_1, v_2, e_1, e_2 *sono linearmente indipendenti, dunque formano una base di* $\mathbf{R}^4$*.* $\square$

Esercizio 13. Nello spazio $\mathbf{R}^4$ sono dati: il sottospazio E, generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, e il sottospazio F, di equazione $x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0$.

a) Trovare una base e la dimensione di E.

b) Trovare una base e la dimensione di F.

c) Trovare una base e la dimensione di $E \cap F$.

d) Dimostrare che $E + F = \mathbf{R}^4$.

Soluzione. $\dim E = 2, \dim F = 3, \dim(E \cap F) = 1$*, con base* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Dalla formula di Grassmann otteniamo che* $\dim(E + F) = 4$*, dunque* $E + F = \mathbf{R}^4$*.*$\square$

Esercizio 14. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ k & 2 & 2 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dove k è un parametro reale.

a) Per quali valori di k le righe di A sono linearmente indipendenti?

b) Per quali valori di k l'ultima colonna è una combinazione lineare delle colonne precedenti?

c) Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} k \\ 5k \\ 8 \end{pmatrix}$ è una combinazione lineare delle colonne di A?

Soluzione. Il rango di A è uguale a 3 per ogni k.

a) *Tutti i valori di k.*

b) *Per $k \neq 2$. Infatti, il determinante della sottomatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 2 & 2 \\ k & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è uguale a $k-2$; dunque per $k \neq 2$ le prime tre colonne formano una base di $\mathbf{R}^3$ e l'ultima colonna sara' dunque combinazione lineare delle precedenti. D'altra parte si verifica che per $k = 2$ l'ultima colonna non è combinazione lineare delle precedenti, poiché* $\text{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ *mentre* $\text{rk}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{rk}A = 3.$

c) *Tutti i valori di k, poichè le colonne di A generano $\mathbf{R}^3$ (dato che il rango è di A è sempre 3).* $\square$

Esercizio 15. Sono dati i vettori v_1, v_2, w_1, w_2, w_3, che assumeremo linearmente indipendenti. Poniamo $E = L[v_1, v_2]$ e $F = L[w_1, w_2, w_3]$.

a) Calcolare $\dim E, \dim F$.

b) Dimostrare che $E \cap F = \{O\}$.

Soluzione. a) *Ogni sottoinsieme di un insieme di vettori linearmente indipendenti è formato da vettori linearmente indipendenti. Dunque* $\dim E = 2$ *e* $\dim F = 3$.

b) *Sappiamo che $E + F = L[v_1, v_2, w_1, w_2, w_3]$. Poiché i generatori sono linearmente indipendenti per ipotesi abbiamo* $\dim(E + F) = 5$ *dunque dalla formula di Grassmann* $\dim(E \cap F) = 0$, *cioè $E \cap F = \{O\}$.*

Con lo stesso argomento, si può dimostrare che, se $v_1, \dots, v_k, w_1 \dots, w_h$ sono vettori linearmente indipendenti, e se $E = L[v_1, \dots, v_k], F = [w_1, \dots, w_h]$, allora: $\begin{cases} \dim E = k \\ \dim F = h \\ E \cap F = \{O\}. \end{cases}$ $\square$

Esercizio 16. In $\mathbf{R}^3$ sono dati: il sottospazio E, insieme delle soluzioni dell'equazione $x+y-z = 0$, e il sottospazio F, generato dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Determinare una base di E.

b) Descrivere il sottospazio F con una o piu' equazioni.
c) Trovare una base del sottospazio $E \cap F$.
d) Trovare una base del sottospazio $E + F$.

Soluzione. a) *Una base di E è formata da due soluzioni linearmente indipendenti, ad esempio* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. b) *Equazione di F : $5x - y - 2z = 0$.* c) *Base* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. d) *Poichè* $\dim(E+F) = 3$ *si ha $E + F = \mathbf{R}^3$ e una qualunque base di $\mathbf{R}^3$ (ad esempio, la base canonica) sarà anche una base di $E + F$.* $\square$

Esercizio 17. Siano v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 vettori di uno spazio vettoriale V tali che $L[v_1, v_2, v_3] \subseteq L[w_1, w_2]$.
a) È vero che $\dim L[v_1, v_2, v_3] = 3$?
b) È vero che v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti?
c) È vero che il vettore $3v_1 - 2v_2$ si puo' scrivere come combinazione lineare di w_1, w_2?

Soluzione. a) *No. Infatti, $L[v_1, v_2, v_3]$ è contenuto nel sottospazio $L[w_1, w_2]$ e ha dunque dimensione minore o uguale a 2.*
b) *Si': se i tre vettori fossero linearmente indipendenti allora* $\dim L[v_1, v_2, v_3] = 3$ *e questo è falso, come già dimostrato in* a) .
c) *Si': il vettore $3v_1 - 2v_2$ è per definizione nel sottospazio $L[v_1, v_2, v_3]$, dunque anche in $L[w_1, w_2]$.* $\square$

Esercizio 18. Siano v_1, v_2, v_3 vettori linearmente indipendenti di uno spazio vettoriale V e siano:

$$\begin{cases} w_1 = v_1 + 2v_2 + v_3 \\ w_2 = 2v_1 - v_3 \\ w_3 = v_1 + 6v_2 + 7v_3 \end{cases}$$

a) È vero che i vettori w_1, w_2, w_3 sono linearmente indipendenti?
b) Calcolare la dimensione del sottospazio di V generato da w_1, w_2, w_3.

Soluzione. Per definizione, (v_1, v_2, v_3) formano una base dello spazio vettoriale $E = L[v_1, v_2, v_3]$. La matrice delle coordinate dei vettori w_1, w_2, w_3 rispetto a tale base è: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$. *Essa ha rango 3: dunque i tre vettori sono linearmente indipendenti e il sottospazio da essi generato ha dimensione 3.* $\square$