Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 5

1 Applicazioni lineari

Esercizio 1. Sono date le seguenti applicazioni lineari da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$:

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x+z\end{pmatrix},\quad f_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y-2z\\-x-y+2z\end{pmatrix}.$$

a) Scrivere la matrice associata a f_i rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^2$.

b) Determinare una base di $\mathrm{Ker} f_i$ e una base di $\mathrm{Im} f_i$.

c) Verificare che il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f_1, e trovare tutti i vettori $v\in\mathbf{R}^3$ tali che $f(v)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

d) Stabilire se il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f_2 oppure no.

Esercizio 2. Sono date le matrici:

$$A_1=\begin{pmatrix}-1&2\\2&-4\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1&3\\2&-1&1\\-1&5&7\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\1&2&1&-1\\1&2&1&-1\end{pmatrix}.$$

a) Per ciascun $i=1,2,3$ scrivere esplicitamente l'applicazione lineare $f_i:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ rappresentata da A_i rispetto alle basi canoniche.

b) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f_i$ e una base di $\mathrm{Im} f_i$.

Esercizio 3. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + 3y + z \\ x + 3y + kz \\ x + 3ky + z \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale. Determinare la dimensione di Ker$f$ al variare di k, e stabilire i valori di k per i quali f è iniettiva.

Esercizio 4. Sia f l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^3$ definita da:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z - 3w \\ -y + z + 2w \\ 2x + y + 5z \end{pmatrix}$$

a) Trovare una base di Ker$f$ e una base di Imf.

b) Stabilire se $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}f$.

c) Trovare, se possibile, un vettore $v \in \mathbf{R}^3$ tale che $v \notin \mathrm{Im}f$.

Esercizio 5. Sia (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbf{R}^3$, e si consideri l'unica applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tale che:

$$\begin{cases} f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

a) Determinare i vettori $f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Determinare $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.

c) Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^2$ (detta anche *matrice canonica* di f).

Esercizio 6. Calcolare $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dove f è l'unica applicazione lineare da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ che verifica le seguenti condizioni: $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f$. (Suggerimento: usare il fatto che la generica applicazione lineare da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ si scrive $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$).

Esercizio 7. Sia $f : \mathbf{Mat}(2 \times 2) \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita dalla legge:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+c \end{pmatrix}.$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ e $\mathbf{R}^2$.
b) Determinare una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

Esercizio 8. Siano V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ e W un secondo spazio vettoriale con base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$. Si consideri l'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che:

$$\begin{cases} f(v_1) = w_1 + w_2 + w_3 \\ f(v_2) = 2w_1 - w_3 \\ f(v_3) = 3w_1 + w_2 \\ f(v_4) = 0 \end{cases}$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.
b) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker} f$.
c) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im} f$.

Esercizio 9. Siano V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ e W un secondo spazio vettoriale con base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$. Si consideri l'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che:

$$\begin{cases} f(v_1) = w_1 + w_3 \\ f(v_2) = 2w_1 + w_2 + 3w_3 \\ f(v_3) = w_1 + w_2 + 2w_3 \end{cases}$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.
b) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker} f$.
c) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im} f$.

Esercizio 10. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vettori di $\mathbf{R}^3$.

a) Dimostrare che esiste un unica applicazione lineare (omomorfismo) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$f(v_1) = f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im} f$.

c) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker} f$.

Esercizio 11. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ in sé stesso definita da:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & d \end{pmatrix}$$

Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

Esercizio 12. Scrivere esplicitamente $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se f è l'unica applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che:

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \ f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare inoltre una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

Esercizio 13. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Dimostrare che i tre vettori sono linearmente dipendenti, e trovare una relazione di dipendenza lineare tra v_1, v_2, v_3.

b) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$f(v_1) = f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se tale f esiste, è unica?

c) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$g(v_1) = g(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ g(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se tale g esiste, è unica?

Esercizio 14. Sia $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e si consideri l'applicazione $T : \mathbf{Mat}(2 \times 2) \to \mathbf{Mat}(2 \times 2)$ definita da $T(A) = AN$ per ogni $A \in \mathbf{Mat}(2 \times 2)$.

a) Verificare che T è lineare.

b) Trovare la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche.

c) Trovare basi di Ker$T$ e ImT.

Esercizio 15. Sia $f : \mathbf{R}^3[x] \to \mathbf{R}^4[x]$ l'applicazione definita da: $f(p(x)) = p'(x) + 2xp(x)$ per ogni polinomio $p(x) \in \mathbf{R}^3[x]$.

a) Verificare che f è lineare e scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche.

b) Stabilire se f è iniettiva.

c) Stabilire se f è suriettiva.

2 Rango e sottospazi

Esercizio 16. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{pmatrix}.$$

Determinare il rango di A al variare dei parametri non nulli a, b.

Soluzione. Il rango è 1 *se* $a^2 = b^2$ *altrimenti è* 2. □

Esercizio 17. Trovare un sistema omogeneo $S : AX = O$ di due equazioni nelle quattro incognite $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ il cui insieme delle soluzioni è il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 18. Sia A una matrice di tipo 3×4 avente rango 3.

a) Aggiungiamo ad A un vettore colonna $v \in \mathbf{R}^3$. Possiamo scegliere v in modo tale che non sia combinazione lineare delle colonne precedenti?

b) Ora aggiungiamo ad A un vettore riga $u \in \mathbf{R}^4$. Possiamo scegliere u in modo tale che non sia combinazione lineare delle righe precedenti?

Esercizio 19. Nello spazio $\mathbf{R}^3$ sono dati il sottospazio E di equazione $x - y + 2z = 0$ e il sottospazio F generato dai vettori $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Determinare una base e la dimensione di ciascuno dei due sottospazi.

b) Dimostrare che $\mathbf{R}^3 = E \oplus F$.

c) Decomporre il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella somma di un vettore di E e di un vettore di F.

Esercizio 20. In uno spazio vettoriale di dimensione 8 sono dati due sottospazi E, F di dimensione 4 e 6, rispettivamente. Quali valori possono assumere $\dim(E + F)$ e $\dim(E \cap F)$?

Esercizio 21. Sia A una matrice 3×4. Stabilire, in ciascun caso, se la data situazione si puo' verificare oppure no.

a) Le righe sono linearmente indipendenti, le colonne sono linearmente indipendenti.

b) Le righe sono linearmente indipendenti, le colonne sono linearmente dipendenti.

c) Le righe sono linearmente dipendenti, le colonne sono linearmente indipendenti.

d) Le righe sono linearmente dipendenti, le colonne sono linearmente dipendenti.

Esercizio 22. Sia E il sottospazio di $\mathbf{R}^4[x]$ formato dai polinomi che si annullano in 0 e 1, vale a dire:

$$E = \{p(x) \in \mathbf{R}^4[x] : p(0) = p(1) = 0\}.$$

Determinare una base e la dimensione di E.