Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 5: soluzioni

1 Applicazioni lineari

Esercizio 1. Sono date le seguenti applicazioni lineari da $\mathbf{R}^3$ a $\mathbf{R}^2$:

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\x+z\end{pmatrix},\quad f_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y-2z\\-x-y+2z\end{pmatrix}.$$

a) Scrivere la matrice associata a f_i rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^2$.

b) Determinare una base di $\mathrm{Ker} f_i$ e una base di $\mathrm{Im} f_i$.

c) Verificare che il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f_1, e trovare tutti i vettori $v\in\mathbf{R}^3$ tali che $f(v)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

d) Stabilire se il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f_2 oppure no.

Soluzione. a) *Rispettivamente* $A_1=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\end{pmatrix}.$

b) *Base di* $\mathrm{Ker} f_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ *mentre* $\mathrm{Im} f_1=\mathbf{R}^2$ *quindi* f_1 *è suriettiva.*

Base di $\mathrm{Ker} f_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$*; base di* $\mathrm{Im} f_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

c) *Siccome f_1 è suriettiva, sicuramente* $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f_1$. *Per trovare i vettori v tali che* $f(v) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ *basta risolvere il sistema:*

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Tale sistema ammette ∞^1 soluzioni, del tipo $\begin{pmatrix}-t\\-t-1\\t\end{pmatrix}$ *con $t \in \mathbf{R}$: tutti questi vettori avranno immagine* $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

d) *No.* $\square$

Esercizio 2. Sono date le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 5 & 7\end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

a) Per ciascun $i = 1, 2, 3$ scrivere esplicitamente l'applicazione lineare $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ rappresentata da A_i rispetto alle basi canoniche.
b) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f_i$ e una base di $\mathrm{Im} f_i$.

Soluzione. a) *Osserviamo innanzitutto che* $f_1 : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ *e* $f_3 : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$. *Si ha quindi*

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x+2y\\2x-4y\end{pmatrix}, \quad f_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y+3z\\2x-y+z\\-x+5y+7z\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+2y+z-w\\x+2y+z-w\\x+2y+z-w\end{pmatrix}.$$

b) $\mathrm{rk} A_1 = 1$ *dunque* $\dim \mathrm{Im} f_1 = 1$ *e, per il teorema della dimensione,* $\dim \mathrm{Ker} f_1 = 1$. *Imponendo* $f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ *e risolvendo otteniamo la base* $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ *per* $\mathrm{Ker} f_1$. *Ora* $\mathrm{Im} f_1$ *ha base data dalle colonne linearmente indipendenti di A_1, cioè il vettore* $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

Si ha $\mathrm{rk} A_2 = 2$ *dunque* $\dim \mathrm{Im} f_2 = 2$ *e* $\dim \mathrm{Ker} f_2 = 1$. *Si trova la base* $\begin{pmatrix}4\\5\\-3\end{pmatrix}$ *per* $\mathrm{Ker} f_2$ *e la base* $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$ *per* $\mathrm{Im} f_2$.

Infine $\text{rk}A_3 = 1$ *da cui* $\dim \text{Im} f_3 = 1$ *e* $\dim \text{Ker} f_3 = 3$. *Si trova la base* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *per* $\text{Im} f_3$ *e la base* $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *per* $\text{Ker} f_3$ *(ovviamente, le basi trovate non sono uniche).* $\square$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx + 3y + z \\ x + 3y + kz \\ x + 3ky + z \end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale. Determinare la dimensione di $\text{Ker} f$ al variare di k, e stabilire i valori di k per i quali f è iniettiva.

Soluzione. La matrice associata rispetto alle basi canoniche è $A = \begin{pmatrix} k & 3 & 1 \\ 1 & 3 & k \\ 1 & 3k & 1 \end{pmatrix}$ *e si ha* $\dim \text{Im} f = \text{rk}A$. *Ora* $\det A = -3(k-1)^2(k+2)$ *che si annulla per* $k = 1$ *e* $k = -2$. *Dunque se* $k \neq 1$ *e* $k \neq -2$ *si ha* $\text{rk}A = 3$. *Si verifica che per* $k = 1$ *il rango vale* 1 *mentre per* $k = -2$ *il rango vale* 2. *Dunque:*

$$\dim \text{Im} f = \text{rk}A = \begin{cases} 3 \ \textit{se} \ k \neq 1 \ \textit{e} \ k \neq -2 \\ 2 \ \textit{se} \ k = -2 \\ 1 \ \textit{se} \ k = 1 \end{cases}.$$

Dal teorema della dimensione ($\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = 3$*), otteniamo:*

$$\dim \text{Ker} f = \begin{cases} 0 \ \textit{se} \ k \neq 1 \ \textit{e} \ k \neq -2 \\ 1 \ \textit{se} \ k = -2 \\ 2 \ \textit{se} \ k = 1 \end{cases}.$$

In particolare, f *è iniettiva se e solo se* $k \neq 1$ *e* $k \neq -2$. $\square$

Esercizio 4. Sia f l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^4$ a $\mathbf{R}^3$ definita da:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y + z - 3w \\ -y + z + 2w \\ 2x + y + 5z \end{pmatrix}$$

a) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

b) Stabilire se $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im} f$.

c) Trovare, se possibile, un vettore $v \in \mathbf{R}^3$ tale che $v \notin \mathrm{Im} f$.

Soluzione. a) *Base di* $\mathrm{Ker} f : (-3, 1, 1, 0)^t, (-1, 2, 0, 1)^t$. *Base di* $\mathrm{Im} f : (1, 0, 2)^t, (2, -1, 1)^t$. b) *Si ha:* $(7, -1, 11)^t = 5(1, 0, 2)^t + (2, -1, 1)^t = f((5, 1, 0, 0)^t)$ *dunque la risposta è affermativa.* c) *Il vettore* $(3, -1, 0)^t \notin \mathrm{Im} f$ *poiché non è combinazione lineare dei vettori della base di* $\mathrm{Im} f$. □

Esercizio 5. Sia (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbf{R}^3$, e si consideri l'unica applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tale che:

$$\begin{cases} f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ f(e_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

a) Determinare i vettori $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $f \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) Determinare $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.

c) Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{R}^3$ e $\mathbf{R}^2$ (detta anche *matrice canonica* di f).

Soluzione. a) $f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(e_1) + 2f(e_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Si trova quindi* $f \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ -y + z \end{pmatrix}$.

c) *Matrice associata rispetto alle basi canoniche* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 6. Calcolare $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dove f è l'unica applicazione lineare da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ che verifica le seguenti condizioni: $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f$. (Suggerimento: usare il fatto che la generica applicazione lineare da $\mathbf{R}^2$ a $\mathbf{R}^2$ si scrive $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbf{R}$).

Soluzione. Si ha $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *e* $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$. *Imponendo* $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *e* $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *otteniamo:*

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da cui $a = 2, b = -2, c = 1, d = -1$ *e quindi*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 7. Sia $f : \mathbf{Mat}(2 \times 2) \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare definita dalla legge:

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d \\ b+c \end{pmatrix}.$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ e $\mathbf{R}^2$.
b) Determinare una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

Soluzione. a) *Siano* (E_1, E_2, E_3, E_4) *la base canonica di* $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ *e* (e_1, e_2) *la base canonica di* $\mathbf{R}^2$. *Allora:*

$$\begin{cases} f(E_1) = e_1 \\ f(E_2) = e_2 \\ f(E_3) = e_2 \\ f(E_4) = e_1 \end{cases}$$

da cui la matrice associata $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) *Il nucleo si ottiene imponendo* $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; *la matrice generica del nucleo si scrive* $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & -a \end{pmatrix}$ *e una sua base è* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. *Per il teorema della dimensione, l'immagine ha dimensione* 2, *dunque* $\mathrm{Im} f = \mathbf{R}^2$ *e* f *risulta suriettiva.* $\square$

Esercizio 8. Siano V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ e W un secondo spazio vettoriale con base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$. Si consideri l'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che:

$$\begin{cases} f(v_1) = w_1 + w_2 + w_3 \\ f(v_2) = 2w_1 - w_3 \\ f(v_3) = 3w_1 + w_2 \\ f(v_4) = 0 \end{cases}$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

b) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}f$.

c) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}f$.

Soluzione. a) *Matrice associata rispetto a $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) *Le coordinate dei vettori del nucleo si ottengono risolvendo il sistema $AX = 0$. Tale sistema ammette ∞^2 soluzioni, con base* $(1, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)$. *Dunque la dimensione è* 2 *con base:*

$$(v_1 + v_2 - v_3, v_4).$$

c) *Il rango di A è* 2, *dunque* $\dim \mathrm{Im}f = 2$. *Prendendo il minore di ordine due in alto a sinistra, una base di* $\mathrm{Im}f$ *è formata da $f(v_1), f(v_2)$ cioe'* $(w_1 + w_2 + w_3, 2w_1 - w_3)$. □

Esercizio 9. Siano V uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ e W un secondo spazio vettoriale con base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$. Si consideri l'unica applicazione lineare $f : V \to W$ tale che:

$$\begin{cases} f(v_1) = w_1 + w_3 \\ f(v_2) = 2w_1 + w_2 + 3w_3 \\ f(v_3) = w_1 + w_2 + 2w_3 \end{cases}$$

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$.

b) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker}f$.

c) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im}f$.

Soluzione. Matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ *con rango* 2. *Dimensione di* $\mathrm{Im}f = 2$ *con base* $f(v_1), f(v_2)$. *Dimensione di* $\mathrm{Ker}f = 1$ *con base* $v_1 - v_2 + v_3$. □

Esercizio 10. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vettori di $\mathbf{R}^3$.

a) Dimostrare che esiste un unica applicazione lineare (omomorfismo) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$f(v_1) = f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f(v_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Im} f$.

c) Determinare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker} f$.

Soluzione. a) *I tre vettori v_1, v_2, v_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$: dunque f esiste ed è unica.*

b) $\mathrm{Im} f$ *è il sottospazio generato da $f(v_1), f(v_2), f(v_3)$, dunque una base è data dal vettore* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) *Sappiamo che la dimensione del nucleo è 2. I vettori $v_1 - v_2$ e $2v_1 - v_3$ sono nel nucleo, e sono linearmente indipendenti, dunque formano una base.*

Si poteva anche procedere considerando la matrice associata a f rispetto alle basi (v_1, v_2, v_3) e (e_1, e_2, e_3) (canonica): $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 11. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ in sé stesso definita da:

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b+c \\ b+c & d \end{pmatrix}$$

Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

Soluzione. Imponendo $f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *otteniamo $a = b+c = d = 0$; il nucleo ha dimensione 1 con base* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. *Per il teorema della dimensione, l'immagine avra' dimensione 3. Essa è generata dai vettori $f(E_1), f(E_2), f(E_3), f(E_4)$ (dove E_1, E_2, E_3, E_4 sono i vettori della base canonica di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$), da cui possiamo estrarre la base*

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

□

Esercizio 12. Scrivere esplicitamente $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, se f è l'unica applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \; f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Determinare inoltre una base di Ker$f$ e una base di Imf.

Soluzione. La generica applicazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *si scrive* $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$*. Imponendo le condizioni troviamo* $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = -1, d = -\frac{1}{2}$*. Dunque:*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}y \\ -x - \frac{1}{2}y \end{pmatrix}.$$

Si trova poi che una base del nucleo è $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ *e una base dell'immagine è* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*.* □

Esercizio 13. Siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

a) Dimostrare che i tre vettori sono linearmente dipendenti, e trovare una relazione di dipendenza lineare tra v_1, v_2, v_3.
b) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$f(v_1) = f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se tale f esiste, è unica?
c) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che:

$$g(v_1) = g(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; g(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se tale g esiste, è unica?

Soluzione. a) $v_3 = -2v_1 + v_2$.

b) *Non esiste. Infatti* $v_3 = -2v_1 + v_2$*, quindi* $f(v_3) = -2f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$*, incompatibile.*

c) *Tale g esiste perché $g(v_3) = g(-2v_1 + v_2)$, ma non è unica.* $\square$

Esercizio 14. Sia $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e si consideri l'applicazione $T : \mathbf{Mat}(2 \times 2) \to \mathbf{Mat}(2 \times 2)$ definita da $T(A) = AN$ per ogni $A \in \mathbf{Mat}(2 \times 2)$.

a) Verificare che T è lineare.

b) Trovare la matrice associata a T rispetto alle basi canoniche.

c) Trovare basi di Ker$T$ e ImT.

Soluzione. a) *Si ha $T(A_1 + A_2) = (A_1 + A_2)N = A_1N + A_2N = T(A_1) + T(A_2)$. Inoltre, se $k \in \mathbf{R}$, si ha $T(kA) = (kA)N = k(AN) = kT(A)$. Dunque T è lineare.*

Esplicitamente, si ha

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & x-y \\ z-w & z-w \end{pmatrix}.$$

b) *Detta (E_1, E_2, E_3, E_4) la base canonica di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ si ha:*

$$\begin{cases} T(E_1) = E_1 + E_2 \\ T(E_2) = -E_1 - E_2 \\ T(E_3) = E_3 + E_4 \\ T(E_4) = -E_3 - E_4 \end{cases}$$

da cui la matrice associata

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice associata ha rango 2 *dunque* $\dim \mathrm{Im}T = 2$ *e dal teorema della dimensione* $\dim \mathrm{Ker}T = 2$. *Due colonne linearmente indipendenti sono, ad esempio, la prima e la terza, da cui una base dell'immagine è formata dalle matrici*

$$T(E_1) = E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(E_3) = E_3 + E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Una base del nucleo si ottiene risolvendo $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *e si trova la base* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

In conclusione

$$\mathrm{Ker}T = L[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}] = \mathrm{Im}T$$

e quindi, in questo caso: $\mathrm{Ker}T = \mathrm{Im}T$. $\square$

Esercizio 15. Sia $f : \mathbf{R}^3[x] \to \mathbf{R}^4[x]$ l'applicazione definita da: $f(p(x)) = p'(x) + 2xp(x)$ per ogni polinomio $p(x) \in \mathbf{R}^3[x]$.

a) Verificare che f è lineare e scrivere la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche.

b) Stabilire se f è iniettiva.

c) Stabilire se f è suriettiva.

Soluzione. La base canonica di $\mathbf{R}^3[x]$ *è* $(1, x, x^2)$ *mentre la base canonica di* $\mathbf{R}^4[x]$ *è* $(1, x, x^2, x^3)$. *Un calcolo mostra che:*

$$\begin{cases} f(1) = 2x \\ f(x) = 1 + 2x^2 \\ f(x^2) = 2x + 2x^3 \end{cases}$$

da cui la matrice associata

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rk} A = 3$ *e poiché lo spazio di arrivo ha dimensione* 4 *si ha che* f *non è suriettiva. Dal teorema della dimensione otteniamo* $\dim \mathrm{Ker} f = 0$ *quindi* f *è iniettiva.* $\square$

2 Rango e sottospazi

Esercizio 16. Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & a & b \\ a+b & a+b & a+b \end{pmatrix}.$$

Determinare il rango di A al variare dei parametri non nulli a, b.

Soluzione. Il rango è 1 *se* $a^2 = b^2$ *altrimenti è* 2. $\square$

Esercizio 17. Trovare un sistema omogeneo $S : AX = O$ di due equazioni nelle quattro incognite $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ il cui insieme delle soluzioni è il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato dai vettori

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\3\\1\end{pmatrix}.$$

Soluzione. I generatori formano una base. Detto $(x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ *il vettore generico di* $\mathbf{R}^4$*, dobbiamo imporre la condizione*

$$\mathrm{rk}\begin{pmatrix}1 & 0 & x_1\\1 & 1 & x_2\\2 & 3 & x_3\\0 & 1 & x_4\end{pmatrix} = 2.$$

Considerando gli orlati del minore $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$*, che ha determinante non nullo, otteniamo le condizioni:*

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & x_1\\1 & 1 & x_2\\2 & 3 & x_3\end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix}1 & 0 & x_1\\1 & 1 & x_2\\0 & 1 & x_4\end{vmatrix} = 0,$$

e dunque il sistema cercato è

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$$

□

Esercizio 18. Sia A una matrice di tipo 3×4 avente rango 3.

a) Aggiungiamo ad A un vettore colonna $v \in \mathbf{R}^3$. Possiamo scegliere v in modo tale che non sia combinazione lineare delle colonne precedenti?

b) Ora aggiungiamo ad A un vettore riga $u \in \mathbf{R}^4$. Possiamo scegliere u in modo tale che non sia combinazione lineare delle righe precedenti?

Soluzione. a) *No: poiché il rango è* 3 *le quattro colonne generano* $\mathbf{R}^3$*.* b) *Si': le righe generano un sottospazio di* $\mathbf{R}^4$ *di dimensione pari al rango, cioè* 3*: dunque possiamo sempre trovare un vettore di* $\mathbf{R}^4$ *che non sia combinazione lineare delle righe di* A*.*□

Esercizio 19. Nello spazio $\mathbf{R}^3$ sono dati il sottospazio E di equazione $x - y + 2z = 0$ e il sottospazio F generato dai vettori $\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}$.

a) Determinare una base e la dimensione di ciascuno dei due sottospazi.

b) Dimostrare che $\mathbf{R}^3 = E \oplus F$.

c) Decomporre il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella somma di un vettore di E e di un vettore di F.

Soluzione. a) *E ha dimensione 2 con base, ad esempio,* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(ma ci sono altre basi possibili). I generatori di F sono linearmente dipendenti e una base di F è data, ad esempio, da* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) *$E + F$ è generato dai vettori* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$*: tali vettori sono linearmente indipendenti dunque* $\dim(E+F) = 3$ *e risulta* $E+F = \mathbf{R}^3$*. Dalla formula di Grassmann otteniamo* $\dim(E \cap F) = 0$ *da cui* $E \cap F = \{O\}$*: questo dimostra che la somma è diretta:* $\mathbf{R}^3 = E \oplus F$*.*

c) *Si ha*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I primi due vettori sono in E e il terzo è in F, dunque possiamo scrivere

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove il primo vettore è in E e il secondo è in F. Tale decomposizione è unica, perché sappiamo che la somma è diretta. □

Esercizio 20. In uno spazio vettoriale di dimensione 8 sono dati due sottospazi E, F di dimensione 4 e 6, rispettivamente. Quali valori possono assumere $\dim(E + F)$ e $\dim(E \cap F)$?

Soluzione. Si ha che $\dim(E + F)$ *può valere* $6, 7, 8$*. Applicando la formula di Grassmann si ha*

$$\dim(E + F) + \dim(E \cap F) = \dim E + \dim F = 10,$$

dunque $\dim(E \cap F) = 4, 3, 2$*, rispettivamente.* □

Esercizio 21. Sia A una matrice 3×4. Stabilire, in ciascun caso, se la data situazione si puo' verificare oppure no.

a) Le righe sono linearmente indipendenti, le colonne sono linearmente indipendenti.

b) Le righe sono linearmente indipendenti, le colonne sono linearmente dipendenti.

c) Le righe sono linearmente dipendenti, le colonne sono linearmente indipendenti.

d) Le righe sono linearmente dipendenti, le colonne sono linearmente dipendenti.

Soluzione. a) *Mai.* b) *Si verifica se il rango vale* 3. c) *Mai.* d) *Si verifica se il rango è minore o uguale a* 2. $\square$

Esercizio 22. Sia E il sottospazio di $\mathbf{R}^4[x]$ formato dai polinomi che si annullano in 0 e 1, vale a dire:

$$E = \{p(x) \in \mathbf{R}^4[x] : p(0) = p(1) = 0\}.$$

Determinare una base e la dimensione di E.

Soluzione. Primo metodo. *Per ipotesi* 0 *e* 1 *sono radici di un qualunque polinomio di* E. *Dunque il polinomio generico di* E *sarà divisibile per* x *e per* $x - 1$, *e si scrive*

$$x(x-1)(a+bx).$$

con $a, b \in \mathbf{R}$. *La dimensione di* E *vale* 2 *e una base è* $x(x-1), x^2(x-1)$.

Secondo metodo. *Partiamo dal polinomio generico di* $\mathbf{R}^4[x]$*:*

$$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

La condizione $p(0) = 0$ *dà* $a = 0$, *mentre la condizione* $p(1) = 0$ *dà* $a+b+c+d = 0$. *Otteniamo il sistema*

$$\begin{cases} a = 0 \\ a+b+c+d = 0 \end{cases}$$

Risolvendo, otteniamo le ∞^2 *soluzioni*

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -t-s \\ c = t \\ d = s \end{cases}$$

con $t, s \in \mathbf{R}$ *e il polinomio generico di* E *si scrive*

$$p(x) = -(t+s)x + tx^2 + sx^3 = t(-x+x^2) + s(-x+x^3).$$

Una base è formata dai due polinomi $-x + x^2, -x + x^3$.

$\square$