Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 6

Esercizio 1. a) Verificare con un calcolo diretto che il polinomio caratteristico di una matrice A di ordine due è dato da:

$$p_A(x) = x^2 - (\mathrm{tr}A)x + \det A$$

dove $\mathrm{tr}A$ (la *traccia* della matrice A) è la somma degli elementi diagonali di A.

b) Dati $a, b \in \mathbf{R}$ trovare una matrice di ordine due il cui polinomio caratteristico è $x^2 + ax + b$.

c) Sia A una qualunque matrice di ordine due con polinomio caratteristico $p_A(x) = x^2$. Dimostrare che $A^2 = 0$.

Esercizio 2. Sono date le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sia f_i l'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ rappresentato da A_i nella base canonica, $i = 1, 2, 3, 4$.

a) Calcolare gli autovalori di ciascuna delle matrici date.

b) Stabilire quali degli endomorfismi f_i sono diagonalizzabili.

c) Se f_i è diagonalizzabile, determinare una base di autovettori e la matrice associata a f_i rispetto a tale base.

d) Se A_i è diagonalizzabile, determinare esplicitamente una matrice M invertibile e una matrice D diagonale tali che $D = M^{-1}A_iM$.

Esercizio 3. Sono date le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia f_i l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ rappresentato da A_i nella base canonica, $i = 1, 2, 3$.

a) Scrivere il polinomio caratteristico e calcolare gli autovalori di ciascuna delle matrici date.

b) Calcolare la molteplicità geometrica di ciascuno degli autovalori.

c) Determinare quali degli endomorfismi f_i sono diagonalizzabili.

d) Se f_i è diagonalizzabile, determinare una base di autovettori e la matrice associata a f_i rispetto a tale base.

e) Se A_i è diagonalizzabile, determinare esplicitamente una matrice M invertibile e una matrice D diagonale tali che $D = M^{-1} A_i M$.

Esercizio 4. a) Trovare le radici del polinomio $p(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 5$.

b) Studiare gli autovalori e gli autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y + z \\ x + 3y + z \\ x + 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

c) Verificare che T è diagonalizzabile, e trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.

d) Se A è la matrice associata a T rispetto alla base canonica, determinare un matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1} A M$.

Esercizio 5. Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che:

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \\ f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3, \\ f(e_3) = e_1. \end{cases}$$

dove (e_1, e_2, e_3) è base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica e calcolare $f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Stabilire se f è iniettivo.

c) Dimostrare che f è diagonalizzabile e trovare esplicitamente una base di autovettori.

Esercizio 6. a) Per quali valori di k la matrice $\begin{pmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

(Suggerimento: usare il fatto che se una matrice di ordine n ha n autovalori distinti, allora è diagonalizzabile.)

b) Per quali valori di h la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2h & 4 \\ 0 & 1 & h-2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

Esercizio 7. Sia A una matrice quadrata avente un solo autovalore $\lambda \in \mathbf{R}$. Dimostrare che, se A è diagonalizzabile, allora $A = \lambda I$ dove I è la matrice identità.

Esercizio 8. Sia f il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^4$:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_3 \\ x_2 + x_4 \\ -x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che gli autovalori distinti di f sono $0, 2, 3$.

b) Verificare che f è diagonalizzabile, trovando esplicitamente una base di autovettori.

Esercizio 9. Data $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, sia T l'endomorfismo di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ definito da

$$T(A) = AN \quad \text{per ogni } A \in \mathbf{Mat}(2 \times 2).$$

a) Scrivere esplicitamente $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

b) Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$.

c) Stabilire se T è diagonalizzabile.

d) Esiste una matrice in $\mathrm{Im}T$ con determinante pari a 1?

Esercizio 10. Trovare un endomorfismo f di $\mathbf{R}^2$ avente autovalori $1, 3$ e tale che $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. f è unico?

Esercizio 11. Sia f l'unico endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ tale che:

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) Verificare che f è diagonalizzabile.

b) Calcolare $f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

c) Trovare la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

Esercizio 12. Sia f un endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con autovalori $-2, 2$ e autospazi:

$E(-2)$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$, $E(2)$ generato dal vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

a) È vero che f è diagonalizzabile?

b) Se f è diagonalizzabile, determinare una base di $\mathbf{R}^4$ costituita da autovettori di f.

Esercizio 13. Spiegare perche' non esiste alcun endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con autovalori $-1, 3$ e autospazi: $E(-1)$ di equazione $x + y - z = 0$, e $E(3)$ di equazione $x + 2y + 3z = 0$.

Esercizio 14. Calcolare la potenza $k-$esima di ognuna delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix}5 & -4\\6 & -5\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & d\end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix}3 & 6\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

(Iniziare calcolando A^2, poi A^3...).

Esercizio 15. In $\mathbf{R}^2$ consideriamo le seguenti basi: $\mathcal{BC} = (e_1, e_2)$ (base canonica), $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right), \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-3\end{pmatrix}\right)$. Calcolare

a) la matrice di passaggio M da $\mathcal{BC}$ a $\mathcal{B}_1$,

b) la matrice di passaggio N da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$,

c) la matrice di passaggio P da $\mathcal{BC}$ a $\mathcal{B}_2$.

Quale relazione intercorre tra M, N e P?