Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 6: soluzioni

Esercizio 1. a) Verificare con un calcolo diretto che il polinomio caratteristico di una matrice A di ordine due è dato da:

$$p_A(x) = x^2 - (\mathrm{tr}A)x + \det A$$

dove $\mathrm{tr}A$ (la *traccia* della matrice A) è la somma degli elementi diagonali di A.

b) Dati $a, b \in \mathbf{R}$ trovare una matrice di ordine due il cui polinomio caratteristico è $x^2 + ax + b$.

c) Sia A una qualunque matrice di ordine due con polinomio caratteristico $p_A(x) = x^2$. Dimostrare che $A^2 = 0$.

Soluzione. b) *Si deve avere* $\mathrm{tr}A = -a, \det A = b$, *dunque, ad esempio* $A = \begin{pmatrix} -a & b \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) *Si deve avere* $\mathrm{tr}A = \det A = 0$, *dunque* A *è del tipo* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ *con la condizione* $a^2 + bc = 0$. *Si verifica che allora* $A^2 = 0$. $\square$

Esercizio 2. Sono date le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sia f_i l'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ rappresentato da A_i nella base canonica, $i = 1, 2, 3, 4$.

a) Calcolare gli autovalori di ciascuna delle matrici date.

b) Stabilire quali degli endomorfismi f_i sono diagonalizzabili.

c) Se f_i è diagonalizzabile, determinare una base di autovettori e la matrice associata a f_i rispetto a tale base.

d) Se A_i è diagonalizzabile, determinare esplicitamente una matrice M invertibile e una matrice D diagonale tali che $D = M^{-1}A_iM$.

Soluzione. **Matrice A_1.** *Autovalori distinti* $3, -3$*: sono tutti e due semplici, quindi* f_1 *è diagonalizzabile (e* A_1 *è diagonalizzabile). Base di* $E(3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$*, base di* $E(-3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*. Dunque una base di autovettori è* $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$*, matrice associata* $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$*. Se* $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ *è la matrice ottenuta incolonnando la base di autovettori, si avrà* $D = M^{-1}AM$*.*

Matrice A_2. *Autovalori distinti* $2, 3$*: sono due, semplici, quindi* f_2 *è diagonalizzabile (e* A_2 *è diagonalizzabile). Base di* $E(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$*, base di* $E(3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Dunque una base di autovettori è* $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$*, matrice associata* $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$*. Se* $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *è la matrice ottenuta incolonnando la base di autovettori, si avrà* $D = M^{-1}AM$*.*

Matrice A_3. *Un solo autovalore* $\lambda_1 = 3$*, con* $MA(3) = 2$ *ma* $MG(3) = 1$*. Dunque* f_3 *non è diagonalizzabile (e* A_3 *non è diagonalizzabile).*

Matrice A_4. *Autovalori distinti* $0, 5$*: sono due, quindi* f_4 *è diagonalizzabile (e* A_4 *è diagonalizzabile). Base di* $E(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$*, base di* $E(5) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$*. Dunque una base di autovettori è* $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$*, matrice associata* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$*. Se* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ *è la matrice ottenuta incolonnando la base di autovettori, si avrà* $D = M^{-1}AM$*.*

Esercizio 3. Sono date le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sia f_i l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ rappresentato da A_i nella base canonica, $i = 1, 2, 3$.

a) Scrivere il polinomio caratteristico e calcolare gli autovalori di ciascuna delle matrici date.

b) Calcolare la molteplicità geometrica di ciascuno degli autovalori.

c) Determinare quali degli endomorfismi f_i sono diagonalizzabili.

d) Se f_i è diagonalizzabile, determinare una base di autovettori e la matrice associata a f_i rispetto a tale base.

e) Se A_i è diagonalizzabile, determinare esplicitamente una matrice M invertibile e una matrice D diagonale tali che $D = M^{-1}A_iM$.

Soluzione. **Matrice A_1.** *Polinomio caratteristico* $-x^3+6x^2-9x+4 = -(x-1)^2(x-4)$ *totalmente riducibile. Autovalori distinti* $1, 4$ *con* $MA(1) = 2, MA(4) = 1$*. Si verifica che* $MG(1) = 2$ *e*

$MG(4) = 1$. *La somma delle molteplicità geometriche è* 3*: dunque* f_1 *è diagonalizzabile. Base di* $E(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, *base di* $E(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Base di autovettori:*

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$*:* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. *Se* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ *allora* $D = M^{-1}AM$.

Matrice A_2**.** *Polinomio caratteristico* $-x(x-1)^2$ *totalmente riducibile. Autovalori distinti* $0, 1$ *con* $MA(0) = 1, MA(1) = 2$. *Si verifica che* $MG(0) = 1$ *e* $MG(1) = 2$. *La somma delle molteplicità geometriche è* 3*: dunque* f_2 *è diagonalizzabile. Base di* $E(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, *base di* $E(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Base di autovettori:*

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$*:* $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Se* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *allora* $D = M^{-1}AM$.

Matrice A_3**.** *Polinomio caratteristico* $-(x-2)^2$. *Un solo autovalore* $\lambda_1 = 2$ *con* $MA(2) = 3$. *Si verifica che* $MG(2) = 1$ *dunque* f_3 *non è diagonalizzabile.*

Esercizio 4. a) Trovare le radici del polinomio $p(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 5$.

b) Studiare gli autovalori e gli autospazi dell'endomorfismo T di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 2y + z \\ x + 3y + z \\ x + 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

c) Verificare che T è diagonalizzabile, e trovare una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di T.

d) Se A è la matrice associata a T rispetto alla base canonica, determinare un matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che $D = M^{-1}AM$.

Soluzione. a) *Le radici sono* $\lambda_1 = 1$ *e* $\lambda_2 = 5$ *e il polinomio si spezza* $p(x) = -(x-1)^2(x-5)$.

b) *Si verifica che il polinomio caratteristico della matrice canonica di* T *è* $p(x) = -x^3 + 7x^2 - 11x + 5$. *Per la parte a), gli autovalori sono* 1 *e* 5 *e si ha* $MA(1) = 2, MA(5) = 1$. *Si ha* $MG(1) = 2 = MA(1)$ *dunque* T *è diagonalizzabile (secondo criterio). Base di* $E(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, *base di* $E(5) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Base di autovettori*

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice associata rispetto alla base canonica $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Possiamo prendere* $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ *e* $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 5. Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che:

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \\ f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3, \\ f(e_3) = e_1. \end{cases}$$

dove (e_1, e_2, e_3) è base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica e calcolare $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Stabilire se f è iniettivo.

c) Dimostrare che f è diagonalizzabile e trovare esplicitamente una base di autovettori.

Soluzione. a) *Matrice canonica* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. *Si ha* $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ *(in particolare,* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *è* *un autovettore associato all'autovalore* 3*).*

b) *Esplicitamente,* $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+x\\2x+y\\2x+y\end{pmatrix}$. *Si verifica che* $\mathrm{Ker}f$ *ha dimensione* 1 *e base* $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$ *dunque* f *non è iniettivo. In particolare,* 0 *è un autovalore di* f *e* $E(0)=\mathrm{Ker}f$ *ha base* $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$.

c) *Polinomio caratteristico* $-x(x-3)(x+1)$ *e autovalori distinti* $0,3,-1$*: sono tre, tutti semplici, quindi* f *è diagonalizzabile. Base di autovettori* $\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$ *associati rispettivamente a* $0,3,-1$.

Esercizio 6. a) Per quali valori di k la matrice $\begin{pmatrix}0&k&0\\1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

(Suggerimento: usare il fatto che se una matrice di ordine n ha n autovalori distinti, allora è diagonalizzabile.)

b) Per quali valori di h la matrice $\begin{pmatrix}2&2h&4\\0&1&h-2\\0&0&1\end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

Soluzione. a) *Il polinomio caratteristico è* $-x(x^2+1-k)$*. Se* $k\le 1$ *abbiamo il solo autovalore* $\lambda_1=0$*; siccome* $\mathrm{rk}A=2$ *per ogni valore di* k*, otteniamo* $MG(0)=1$ *per ogni* k*, dunque la somma delle molteplicità geomeriche vale* 1*, e* A *non è diagonalizzabile.*

Se $k>1$ *abbiamo tre autovalori distinti* $0,\sqrt{k-1},-\sqrt{k-1}$*, tutti semplici, dunque* A *è diagonalizzabile. In conclusione,* A *è diagonalizzabile se e solo se* $k>1$.

b) *Risulta che* A *è diagonalizzabile se e solo se* $h=2$*. Infatti, la matrice è triangolare superiore, per cui gli autovalori sono gli elementi diagonali distinti, cioè* $\lambda_1=1$*, con* $MA(1)=2$*, e* $\lambda_2=2$*, con* $MA(2)=1$ *(quindi* λ_2 *è semplice). Applicando il secondo criterio, osserviamo che* A *è diagonalizzabile se e solo se* $MG(1)=2$*. Sappiamo che* $MG(1)=3-\mathrm{rk}(A-I)$*. Ora*

$$A-I=\begin{pmatrix}1&2h&4\\0&0&h-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

da cui

$$\mathrm{rk}(A-I)=\begin{cases}2 & \textit{se } h\neq 2\\ 1 & \textit{se } h=2\end{cases}$$

In conclusione

$$MG(1) = \begin{cases} 1 & \textit{se } h \neq 2 \\ 2 & \textit{se } h = 2 \end{cases}$$

e di conseguenza A è diagonalizzabile se e solo se $h = 2$. $\square$

Esercizio 7. Sia A una matrice quadrata avente un solo autovalore $\lambda \in \mathbf{R}$. Dimostrare che, se A è diagonalizzabile, allora $A = \lambda I$ dove I è la matrice identità.

Soluzione. Poiché A è diagonalizzabile, la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori deve valere n (l'ordine della matrice). Siccome abbiamo un solo autovalore λ dovrà risultare $MG(\lambda) = n$; d'altra parte $MG(\lambda) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda I)$ e otteniamo $\mathrm{rk}(A - \lambda I) = 0$. Ma l'unica matrice di rango nullo è la matrice nulla, quindi $A - \lambda I = O$ e necessariamente $A = \lambda I$. $\square$

Esercizio 8. Sia f il seguente endomorfismo di $\mathbf{R}^4$:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 2x_3 \\ x_2 + x_4 \\ -x_1 + x_3 \\ x_2 + x_4 \end{pmatrix}.$$

a) Verificare che gli autovalori distinti di f sono $0, 2, 3$.

b) Verificare che f è diagonalizzabile, trovando esplicitamente una base di autovettori.

Soluzione. a) *La matrice canonica di f è* $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *e un calcolo mostra che il polinomio caratteristico è $x(x-2)^2(x-3)$. Gli autovalori distinti sono $0, 2, 3$ di cui solo il secondo è multiplo: $MA(2) = 2$.*

b) *Applicando il secondo criterio, basta osservare che $MG(2) = 2 = MA(2)$, dunque f è diagonalizzabile. Si trova la base di autovettori:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dove il primo è associato a 0, il secondo e il terzo a 2 e il quarto a 3. $\square$

Esercizio 9. Data $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, sia T l'endomorfismo di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ definito da

$$T(A) = AN \quad \text{per ogni } A \in \mathbf{Mat}(2 \times 2).$$

a) Scrivere esplicitamente $T \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$.

b) Scrivere la matrice associata a T rispetto alla base canonica di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$.

c) Stabilire se T è diagonalizzabile.

d) Esiste una matrice in $\mathrm{Im}T$ con determinante pari a 1?

Soluzione. a) *Si ha per definizione*

$$T \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & x-y \\ z-w & z-w \end{pmatrix}.$$

b) *La matrice associata a T rispetto alla base canonica è* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) *Il polinomio caratteristico di A è $p_A(x) = x^4$ e abbiamo il solo autovalore nullo. Poiché $MG(0) = 2$, si vede che T non è diagonalizzabile.*

d) *L'immagine di T è generata dalle matrici* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, *dunque*

$$\mathrm{Im}T = \{ \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \}.$$

Risulta che ogni *matrice di* $\mathrm{Im}T$ *ha determinante nullo, quindi la risposta è negativa.*

Piú semplicemente, bastava osservare che ogni matrice dell'immagine di T è un prodotto AN: dunque ha determinante nullo, poiché $\det(AN) = \det A \cdot \det N = 0$. □

Esercizio 10. Trovare un endomorfismo f di $\mathbf{R}^2$ avente autovalori $1, 3$ e tale che $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. f è unico?

Soluzione. Cerchiamo di determinare la matrice canonica di f, diciamo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Gli autovalori di f (cioè $1, 3$) devono essere entrambi di molteplicità algebrica 1 (spiegare perché). Dunque il polinomio caratteristico è

$$(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3,$$

da cui $\mathrm{tr}A = 4, \det A = 3$. *Otteniamo le condizioni:*

$$\begin{cases} a + d = 4 \\ ad - bc = 3 \end{cases}$$

Ora $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, *e sappiamo che per ipotesi* $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. *Dunque* $a = 2, c = 1$ *e quindi* $b = 1, d = 2$. *L'unica matrice possibile è dunque* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *(che verifica le condizioni).* f *è unico, e risulta*

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 11. Sia f l'unico endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ tale che:

$$\begin{cases} f \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \\ f \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a) Verificare che f è diagonalizzabile.

b) Calcolare $f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) Trovare la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

Soluzione. a) *I vettori* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *sono linearmente indipendenti e formano una base di* $\mathbf{R}^2$*: dunque* f *esiste ed è unico. Per ipotesi*

$$\begin{cases} f(v_1) = 4v_1 \\ f(v_2) = -v_2 \end{cases}$$

e $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ *è una base di autovettori associati rispettivamente agli autovalori* 4 *e* -1. *Dunque* f *è diagonalizzabile, e la matrice associata a* f *rispetto alla base* (v_1, v_2) *è* $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b) *Si ha* $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3v_1 - 2v_2$ *e* $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -v_1 + v_2$ *da cui*

$$\begin{cases} f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 3f(v_1) - 2f(v_2) = \begin{pmatrix}14\\30\end{pmatrix} \\ f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -f(v_1) + f(v_2) = \begin{pmatrix}-5\\-11\end{pmatrix} \end{cases}$$

c) *La matrice canonica di f ha colonne date da $f(e_1), f(e_2)$, dunque è* $A = \begin{pmatrix}14 & -5\\30 & -11\end{pmatrix}$.

Potevamo procedere anche nel modo seguente. Sappiamo che, se A è la matrice canonica di f, e D è la matrice associata rispetto alla base di autovettori $\mathcal{B}$, allora si ha $D = M^{-1}AM$, dove M è la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$, cioè $M = \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}$. *Dunque, poiché* $M^{-1} = \begin{pmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{pmatrix}$ *si ha*

$$A = MDM^{-1} = \begin{pmatrix}14 & -5\\30 & -11\end{pmatrix}.$$

$\square$

Esercizio 12. Sia f un endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ con autovalori $-2, 2$ e autospazi:

$E(-2)$ di equazione $x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0$, $E(2)$ generato dal vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$.

a) È vero che f è diagonalizzabile?
b) Se f è diagonalizzabile, determinare una base di $\mathbf{R}^4$ costituita da autovettori di f.

Soluzione. a) *Osserviamo che $E(-2)$ ha dimensione 3 e $E(2)$ ha dimensione 1. Poiché per definizione la molteplicità geometrica di un autovalore è la dimensione dell'autospazio associato, si ha*

$$MG(-2) + MG(2) = 3 + 1 = 4,$$

dunque f è diagonalizzabile per il primo criterio.
b) *Una base di $E(-2)$ è data da tre soluzioni indipendenti dell'equazione che definisce $E(-2)$, ad esempio* $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. *Una base di $E(2)$ è* $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. *Una base di autovettori si ottiene unendo le due basi trovate.* $\square$

Esercizio 13. Spiegare perche' non esiste alcun endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con autovalori $-1, 3$ e autospazi: $E(-1)$ di equazione $x + y - z = 0$, e $E(3)$ di equazione $x + 2y + 3z = 0$.

Soluzione. Si avrebbe $MG(-1) + MG(3) = 4$, *e questo è impossibile poiché la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori non può mai superare la dimensione* n *(in questo caso* 3*).* $\square$

Esercizio 14. Calcolare la potenza $k-$esima di ognuna delle seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Iniziare calcolando A^2, poi A^3...).

Soluzione. Osserviamo che $A_1^2 = I$, $A_1^3 = A, A_1^4 = I\ldots$ *Dunque*

$$A_1^k = \begin{cases} A & \textit{se } k \textit{ è dispari} \\ I & \textit{se } k \textit{ è pari} \end{cases}.$$

Si ha poi $A_2^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & d^k \end{pmatrix}$. *Infine* $A_3^2 = 5A_3$ *e quindi* $A_3^k = 5^{k-1}A_3$. $\square$

Esercizio 15. In $\mathbf{R}^2$ consideriamo le seguenti basi: $\mathcal{BC} = (e_1, e_2)$ (base canonica), $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$. Calcolare

a) la matrice di passaggio M da $\mathcal{BC}$ a $\mathcal{B}_1$,

b) la matrice di passaggio N da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$,

c) la matrice di passaggio P da $\mathcal{BC}$ a $\mathcal{B}_2$.

Quale relazione intercorre tra M, N e P?

Soluzione. a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) *Si ha:*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

dunque $N = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $P = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$. *Risulta* $P = MN$.