Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 7

Esercizio 1. Dimostrare che l'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 2x+6y \end{pmatrix}$ è simmetrico, e trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di f.

Esercizio 2. Data la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $M^t AM = D$.

Esercizio 3. Dimostrare che l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ -x-y+z \end{pmatrix}$ è simmetrico, e trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f.

Esercizio 4. Data la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $M^t AM = D$.

Esercizio 5. Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che:

$$f(e_1) = e_1 + e_3, \quad f(e_2) = e_2, \quad f(e_3) = e_1 + e_3,$$

dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

b) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

c) Stabilire se f è diagonalizzabile.

d) Trovare, se esiste, una base ortonormale di autovettori di f.

Esercizio 6. Sono dati i vettori di $\mathbf{R}^4$: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; sia E il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato da v_1, v_2, v_3.

a) Descrivere E con un'equazione e calcolare la dimensione di E.

b) Trovare una base ortonormale del sottospazio E.

c) Estendere la base trovata in b) ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$.

d) Trovare una base del sottospazio $E^{\perp}$.

Esercizio 7. Sono dati i vettori: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

a) Trovare una base di ciascuno dei sottospazi:

$$W_1 = \{v \in \mathbf{R}^3 : \langle v, v_1 \rangle = 0\} \quad W_2 = \{v \in \mathbf{R}^3 : \langle v, v_2 \rangle = 0\},$$

e quindi trovare una base di $W_3 = W_1 \cap W_2$.

b) Determinare una base ortonormale di W_1 e una base ortonormale di $W_1^{\perp}$.

c) È vero che $\mathbf{R}^3 = W_1 \oplus W_2$?

d) È vero che $\mathbf{R}^3 = W_1 \oplus W_2^{\perp}$?

Esercizio 8. a) Trovare tutti i vettori di $\mathbf{R}^2$ che hanno norma 1 e sono ortogonali a $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) Trovare tutti i vettori di $\mathbf{R}^3$ che hanno norma 1 e sono ortogonali a entrambi i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Esiste un vettore di norma 1 ortogonale ai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Esercizio 9. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Trovare una base ortonormale di W, ed estendere tale base ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$.

Esercizio 10. Dato il vettore $u = (1, 1, -1, -1)^t \in \mathbf{R}^4$, si consideri il sottospazio W:

$$W = \{w \in \mathbf{R}^4 : \langle w, u \rangle = 0\}.$$

a) Trovare una base di W.

b) Trovare una base ortonormale di W e una base ortonormale di $W^\perp$.

c) Determinare i vettori di W che hanno norma 2 e sono ortogonali ai primi due vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$.

d) Descrivere il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori di W che sono ortogonali ai primi tre vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$.

Esercizio 11. a) Determinare una base ortonormale del sottospazio E di $\mathbf{R}^3$ di equazione $x - y + 2z = 0$.

b) Trovare una matrice ortogonale le cui prime due colonne appartengono al sottospazio E.

c) Sia f un endomorfismo simmetrico non nullo di $\mathbf{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker} f = E$. Descrivere gli autospazi di f.

Esercizio 12. Sia f l'unico endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ tale che $f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) f è simmetrico?

b) Calcolare $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Esercizio 13. a) Sia A una matrice simmetrica 2×2, non diagonale. Dimostrare che A ammette due autovalori reali e distinti, quindi è diagonalizzabile.

b) Sia B una matrice antisimmetrica 2×2 diversa dalla matrice nulla. Dimostrare che B non è diagonalizzabile.

Esercizio 14. Sia P una matrice simmetrica tale che $P^2 = P$. Dimostrare che la matrice $A = 2P - I$ è ortogonale e verifica $A^2 = I$.

Esercizio 15. Supponiamo che f sia un endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con autovalori $-1, 3$ e autospazi: $E(-1)$, di equazione $x - 2y + z = 0$, ed $E(3)$, generato dal vettore $(2, 0, 1)$.

a) È vero che f è diagonalizzabile?

b) Stabilire quale fra le seguenti matrici può rappresentare f:

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) È vero che f è simmetrico?