Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 7: soluzioni

Esercizio 1. Dimostrare che l'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 2x+6y \end{pmatrix}$ è simmetrico, e trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di f.

Soluzione. La matrice canonica è $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, *simmetrica: f è simmetrico, dunque diagonalizzabile. Gli autovalori sono $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7$. Base di $E(2)$:* $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; *base ortonormale di $E(2)$:* $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Analogamente, una base ortonormale di $E(7)$ è* $\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Unendo le due basi ortonormali, otteniamo la base ortonormale di autovettori*

$$\mathcal{B} : \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 2. Data la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $M^t AM = D$.

Soluzione. Le colonne di M sono date da una base ortonormale di autovettori dell'endomorfismo simmetrico f di $\mathbf{R}^2$ rappresentato da A rispetto alla base canonica. Un calcolo mostra che gli autovalori sono $\lambda_1 = -5, \lambda_2 = 5$, e una base ortonormale di autovettori è

$$\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

associati rispettivamente a -5 *e* 5*. Dunque possiamo prendere* $M = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 3. Dimostrare che l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$: $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y-z \\ -x-y+z \end{pmatrix}$ è simmetrico, e trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f.

Soluzione. La matrice canonica è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$*, è simmetrica, dunque* f *è diagonalizzabile.*

Gli autovalori distinti sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$*. Una base di* $E(0)$ *è data da* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$*. Per ricavare una base ortonormale, applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt a tale base e troviamo la base ortonormale di* $E(0)$*:*

$$\mathcal{B}_1 : \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si verifica poi che una base ortonormale di $E(3)$ *è data da*

$$\mathcal{B}_2 : \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ *formata da autovettori di* f *è dunque*

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 : \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 4. Data la matrice simmetrica $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $M^tAM = D$.

Soluzione. *Occorre trovare una base ortonormale dell'endomorfismo di* $\mathbf{R}^3$ *rappresentato da* A *rispetto alla base canonica. Gli autovalori sono* $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$*: sono tutti semplici, e quindi i tre autospazi hanno tutti dimensione* 1*. Un calcolo mostra che una base ortonormale di* $E(0)$ *è*

$$\mathcal{B}_1 : \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

una base ortonormale di $E(1)$ *è*

$$\mathcal{B}_2 : \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e una base ortonormale di $E(3)$ *è*

$$\mathcal{B}_3 : \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dunque una base ortonormale di autovettori è

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_1 : \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

associati, rispettivamente, a $0, 1, 3$*, dunque*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 5. Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ tale che:

$$f(e_1) = e_1 + e_3, \quad f(e_2) = e_2, \quad f(e_3) = e_1 + e_3,$$

dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica.

b) Trovare una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $\mathrm{Im} f$.

c) Stabilire se f è diagonalizzabile.

d) Trovare, se esiste, una base ortonormale di autovettori di f.

Soluzione. a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) *Il nucleo ha base* $(1, 0, -1)^t$*, l'immagine ha base data dalle colonne linearmente indipendenti di A, cioè* $(1, 0, 1)^t, (0, 1, 0)^t$.

c) *Poiché la matrice canonica A di f è simmetrica, f è un endomorfismo simmetrico dunque è sicuramente diagonalizzabile.*

d) *Autovalori:* $0, 1, 2$. *Si verifica che una base ortonormale di autovettori è ad esempio*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

associati, rispettivamente, a $0, 1, 2$. □

Esercizio 6. Sono dati i vettori di $\mathbf{R}^4$: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; sia E il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ generato da v_1, v_2, v_3.

a) Descrivere E con un'equazione e calcolare la dimensione di E.

b) Trovare una base ortonormale del sottospazio E.

c) Estendere la base trovata in b) ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$.

d) Trovare una base del sottospazio $E^\perp$.

Soluzione. a) *I tre generatori sono linearmente indipendenti e la dimensione di E vale* 3. *Il sottospazio è descritto dall'equazione* $x_2 - x_4 = 0$.

b) *Applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt alla base* (v_1, v_2, v_3) *e otteniamo la base ortonormale:*

$$u_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) *Il vettore* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *è ortogonale a* v_1, v_2, v_3 *dunque una base ortonormale di* $\mathbf{R}^4$ *che estende la* *base precedente è:*

$$u_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, u_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

d) $E^\perp$ *ha dimensione* 1 *con base* $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$. $\square$

Esercizio 7. Sono dati i vettori: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\4\end{pmatrix}$.

a) Trovare una base di ciascuno dei sottospazi:

$$W_1 = \{v \in \mathbf{R}^3 : \langle v, v_1\rangle = 0\} \quad W_2 = \{v \in \mathbf{R}^3 : \langle v, v_2\rangle = 0\},$$

e quindi trovare una base di $W_3 = W_1 \cap W_2$.
b) Determinare una base ortonormale di W_1 e una base ortonormale di $W_1^\perp$.
c) È vero che $\mathbf{R}^3 = W_1 \oplus W_2$?
d) È vero che $\mathbf{R}^3 = W_1 \oplus W_2^\perp$?

Soluzione. a) *Detto* $v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ *il vettore generico osserviamo che* $v \in W_1$ *se e solo se* $x + 2y - 3z = 0$, *che è quindi l'equazione di* W_1. *Risolvendo, otteniamo la base di* W_1 *data da* $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$. *In modo analogo,* W_2 *ha equazione* $x - y + 4z = 0$ *e base* $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$. *Ora* $W_1 \cap W_2$ *ha equazioni*

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x - y + 4z = 0 \end{cases}$$

e risolvendo otteniamo la base di $W_1 \cap W_2$ *data dal vettore* $\begin{pmatrix}-5\\7\\3\end{pmatrix}$. *Osserviamo anche che* $W_1 \cap W_2$ *è il sottospazio formato dai vettori ortogonali sia a* v_1 *che a* v_2.

b) *Applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt alla base* $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *di* W_1 *otteniamo la base ortonormale di* W_1 *data da*

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{70}}\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Si vede subito che $W_1^\perp$ *ha base* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ *dunque una base ortonormale di* $W_1^\perp$ *è* $\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

c) *No, perché* $W_1 \cap W_2 \neq \{O\}$.

d) $W_2^\perp$ *ha dimensione* 1, *con base* $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. *I tre vettori* $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ *sono linearmente indipendenti, e formano una base di* $\mathbf{R}^3$*: si ha dunque che* $W_1 + W_2^\perp = \mathbf{R}^3$ *e* $W_1 \cap W_2^\perp = \{O\}$*: la somma è diretta.* $\square$

Esercizio 8. a) Trovare tutti i vettori di $\mathbf{R}^2$ che hanno norma 1 e sono ortogonali a $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

b) Trovare tutti i vettori di $\mathbf{R}^3$ che hanno norma 1 e sono ortogonali a entrambi i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) Esiste un vettore di norma 1 ortogonale ai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

Soluzione. a) *Il vettore generico di* $\mathbf{R}^2$ *ortogonale a* $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ *è* $\begin{pmatrix} 5t \\ -2t \end{pmatrix}$, *con* $t \in \mathbf{R}$, *e ha norma* $\sqrt{29t^2}$. *La norma del vettore è* 1 *se e solo se* $t = \pm\frac{1}{\sqrt{29}}$. *Dunque i vettori cercati sono due:*

$$\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

b) *Il vettore generico* $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *di* $\mathbf{R}^3$ *è ortogonale a entrambi i vettori* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *se e solo* *se*

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

Risolvendo, vediamo che v *è del tipo* $t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$*, e ha norma* 1 *se e solo se* $t=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$*. I vettori cercati sono due:*

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

c) *No. I tre vettori* $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ *sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di* $\mathbf{R}^3$*: l'unico vettore ortogonale a tutti i vettori di una base è il vettore nullo.* $\square$

Esercizio 9. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX=0$ dove

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1&1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}$$

Trovare una base ortonormale di W, ed estendere tale base ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$.

Soluzione. Il sistema si scrive

$$\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+y-z+w=0 \end{cases}$$

e il suo insieme delle soluzioni è $W=\{\begin{pmatrix}-s\\t\\t\\s\end{pmatrix} : t,s\in\mathbf{R}\}$ *con base*

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

I due vettori sono già ortogonali, quindi una base ortonormale di W *si ottiene semplicemente normalizzando tali vettori:*

$$\mathcal{B}_1 : \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ che estende la base di W appena trovata si ottiene aggiungendo una base ortonormale del sottospazio $W^\perp$. Ora $W^\perp$ ha equazioni $x_1 - x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0$ dunque una base ortonormale di $W^\perp$ è $\mathcal{B}_2 : \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^t, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)^t$. Unendo le due basi si ottiene la base ortonormale estesa:

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 : \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

□

Esercizio 10. Dato il vettore $u = (1,1,-1,-1)^t \in \mathbf{R}^4$, si consideri il sottospazio W:

$$W = \{w \in \mathbf{R}^4 : \langle w, u\rangle = 0\}.$$

a) Trovare una base di W.

b) Trovare una base ortonormale di W e una base ortonormale di $W^\perp$.

c) Determinare i vettori di W che hanno norma 2 e sono ortogonali ai primi due vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$.

d) Descrivere il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ costituito dai vettori di W che sono ortogonali ai primi tre vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$.

Soluzione. a) *W ha equazione $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$ e base, ad esempio:*

$$(1,-1,0,0)^t, (1,0,1,0)^t, (1,0,0,1)^t.$$

b) *Ortonormalizzando la base appena trovata con l'algoritmo di Gram-Schmidt si ottiene la base ortonormale di W:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\3\end{pmatrix}.$$

Una base di $W^\perp$ è $u = (1,1,-1,-1)$ e quindi una base ortonormale di $W^\perp$ è

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}.$$

c) *Il vettore generico di W è del tipo $(-b+c+d,b,c,d)^t$, con $a,b,c \in \mathbf{R}$. Tale vettore è ortogonale a e_1, e_2 se e solo se $b=0, c+d=0$. Dunque otteniamo vettori del tipo $(0,0,t,-t)$, con norma $\sqrt{2t^2}$. Uguagliando la norma a 2 otteniamo $t=\sqrt{2}, t=-\sqrt{2}$. Dunque otteniamo i due vettori:*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

d) *Il sottospazio nullo.* □

Esercizio 11. a) Determinare una base ortonormale del sottospazio E di $\mathbf{R}^3$ di equazione $x-y+2z=0$.
b) Trovare una matrice ortogonale le cui prime due colonne appartengono al sottospazio E.
c) Sia f un endomorfismo simmetrico non nullo di $\mathbf{R}^3$ tale che $\mathrm{Ker} f = E$. Descrivere gli autospazi di f.

Soluzione. a) *Una base di E è* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *e applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt otteniamo la base ortonormale di E:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) *Sappiamo che le colonne di una matrice ortogonale 3×3 devono formare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$. Le prime due colonne di M devono essere quindi una base ortonormale di E: le prendiamo uguali ai due vettori della base ortonormale trovata nella parte a). L'ultima colonna deve essere una base ortonormale di $E^\perp$, ad esempio* $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. *Dunque una matrice possibile è:*

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

c) *Gli autospazi di un endomorfismo simmetrico sono a due a due ortogonali. Per ipotesi, f ha un autovalore $\lambda_1 = 0$ con autospazio associato di dimensione 2 dato dal sottospazio E. Per* *il teorema spettrale, f è diagonalizzabile. Quindi f ammetterà un secondo autovalore $\lambda_2 \neq 0$ con autospazio associato $E(\lambda_2)$ di dimensione 1, e tale che $E(\lambda_2) \perp E$. Necessariamente, $E(\lambda_2) = E^{\perp}$. In conclusione, gli autospazi di f sono E e $E^{\perp}$, quest'ultimo con base* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. □

Esercizio 12. Sia f l'unico endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ tale che $f\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) f è simmetrico?

b) Calcolare $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Soluzione. a) *I vettori* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *formano una base di* $\mathbf{R}^2$ *e si ha per ipotesi*

$$\begin{cases} f(v_1) = -v_1 \\ f(v_2) = 2v_2 \end{cases}$$

dunque (v_1, v_2) è una base di autovettori. I due vettori v_1, v_2 sono ortogonali, dunque i vettori normalizzati

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale *di autovettori. Di conseguenza, f è simmetrico, e la matrice associata a f rispetto alla base ortonormale appena trovata è* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

b) *Sia A la matrice canonica di f. Allora sappiamo che $D = M^t AM$, dove M è la matrice ortogonale di colonne u_1, u_2, cioè* $M = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. *Quindi:*

$$A = MDM^t = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

In conclusione, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7x + 6y \\ 6x - 2y \end{pmatrix}$. □

Esercizio 13. a) Sia A una matrice simmetrica 2×2, non diagonale. Dimostrare che A ammette due autovalori reali e distinti, quindi è diagonalizzabile.

b) Sia B una matrice antisimmetrica 2×2 diversa dalla matrice nulla. Dimostrare che B non è diagonalizzabile.

Soluzione. a) *La matrice è del tipo* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$, *quindi* $p_A(x) = x^2 - (a+d)x + (ad - b^2)$. *Le radici del polinomio caratteristico sono date dalla formula*

$$x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{\Delta}}{2},$$

con $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - b^2) = (a-d)^2 + 4b^2$. *Ora il discriminante* Δ *è sempre positivo o nullo, ed è nullo se e solo se* $a = d$ *e* $b = 0$, *cioè se e solo se* A *è diagonale. Per ipotesi,* A *non è diagonale, dunque* Δ *è positivo e* A *ammette due autovalori reali e distinti, entrambi semplici (cioè, di molteplicità algebrica* 1*). Questo è sufficiente per concludere che* A *è diagonalizzabile.*
b) *La generica matrice antisimmetrica di ordine due si scrive* $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$, *e poiché* B *non è nulla si avrà* $b \neq 0$. *Il polinomio caratteristico di* B *è* $x^2 + b^2$: *non ammette radici, dunque* B *non è diagonalizzabile.* $\square$

Esercizio 14. Sia P una matrice simmetrica tale che $P^2 = P$. Dimostrare che la matrice $A = 2P - I$ è ortogonale e verifica $A^2 = I$.

Soluzione. Si ha:

$$\begin{aligned} A^2 &= (2P - I)^2 \\ &= (2P - I)(2P - I) \\ &= 4P^2 - 2P - 2P + I^2 \\ &= I \end{aligned}$$

dunque $A^2 = I$. *Ora* A *è anche simmetrica, poiché combinazione lineare di* P *e* I, *che sono simmetriche. Dunque* $A = A^t$ *e* $AA^t = A^2 = I$. *In conclusione,* A *è ortogonale e simmetrica.* $\square$

Esercizio 15. Supponiamo che f sia un endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ con autovalori $-1, 3$ e autospazi: $E(-1)$, di equazione $x - 2y + z = 0$, ed $E(3)$, generato dal vettore $(2, 0, 1)^t$.
a) È vero che f è diagonalizzabile?
b) Stabilire quale fra le seguenti matrici può rappresentare f:

$$D_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

c) È vero che f è simmetrico?

Soluzione. a) *Si ha per ipotesi* $MG(-1) = \dim E(-1) = 2$ *e* $MG(3) = \dim E(3) = 1$ *dunque*

$MG(-1) + MG(3) = 3$ e f risulta diagonalizzabile per il primo criterio.

b) *D_1 rappresenta f in una base di autovettori v_1, v_2, v_3 dove v_1, v_3 formano una base di $E(-1)$ e v_2 è un autovettore di $E(3)$.*

D_2 non può rappresentare f, perché altrimenti l'autovalore 3 avrebbe molteplicità geometrica pari a 2.

c) *f non è un endomorfismo simmetrico, perché i due autospazi non sono ortogonali tra loro: infatti, il vettore $(2,0,1)^t \in E(3)$ non è ortogonale al vettore $(2,1,0)^t \in E(-1)$.* $\square$