Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi 8: soluzioni

Esercizio 1. a) Disegnare la retta r di equazione cartesiana $x - 2y - 4 = 0$.

b) Determinare l'equazione cartesiana della retta r_1 passante per $P_0 = (1, 1)$ e parallela a r.

c) Determinare l'equazione cartesiana della retta r_2 passante per l'origine e parallela a r.

d) Scrivere equazioni parametriche di r.

Soluzione. b) *Il fascio di rette parallele a* r *ha equazione* $x - 2y + k = 0$. *La retta cercata è* $r_1 : x - 2y + 1 = 0$. c) $r_2 : x - 2y = 0$. c) $r : \begin{cases} x = 2t + 4 \\ y = t \end{cases}$. $\square$

Esercizio 2. Nel piano sono dati i punti $P_1 = (1, 2), P_2 = (2, -1)$.

a) Determinare l'equazione cartesiana della retta r passante per P_1 e P_2.

b) Determinare equazione cartesiana e equazioni parametriche della retta r_1 passante per P_1 e parallela al vettore $\vec{v} = 2\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$.

c) Determinare l'equazione cartesiana della retta r_2 passante per P_2 e parallela alla retta r_1 trovata in b).

d) Disegnare le rette trovate.

Soluzione. a) *Equazione cartesiana* $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ *quindi* $3x + y - 5 = 0$. b) *La retta* r_1 *passa per* $(1, 2)$ *e ha parametri direttori* $(2, -3)$ *dunque ha equazioni parametriche:*

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}.$$

L'equazione cartesiana si ottiene eliminando il parametro: $r_1 : 3x + 2y - 7 = 0$.

c) *La retta generica parallela a* r_1 *ha equazione* $3x + 2y + k = 0$. *Passa per* $(2, -1)$ *se e solo se* $k = -4$. *Dunque* r_2 *ha equazione* $3x + 2y - 4 = 0$. □

Esercizio 3. Nel piano sono date le rette $r : x - 2y + 3 = 0, r' : 2x + y + 1 = 0$.

a) Verificare che le rette non sono parallele, e calcolare le coordinate del punto A, intersezione di r e r'.

b) Determinare l'equazione cartesiana della retta passante per il punto A trovato in a) e parallela all'asse y.

c) Calcolare l'area del triangolo formato dall'origine e dalle intersezioni di r con gli assi coordinati.

Soluzione. a) $A = (-1, 1)$. b) $x = -1$. c) *Intersezioni con gli assi date dai punti* $(-3, 0), (0, \frac{3}{2})$ *dunque l'area vale* $\frac{9}{4}$. □

Esercizio 4. Disegnare i punti $A = (1, 3), B = (3, 4), C = (4, 1)$.

a) Determinare le coordinate del punto D tale che $ABDC$ sia un parallelogramma.

b) Determinare le coordinate del punto D' tale che $ABCD'$ sia un parallelogramma.

c) Disegnare i parallelogrammi in a) e b).

d) È vero che i punti D, C, D' sono allineati?

e) È vero che i vettori $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{D'C}$ sono equipollenti?

Soluzione. a) *Risulta* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ *dunque, passando alle coordinate:* $D = B + C - A = (6, 2)$.

b) *Risulta* $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ *dunque, passando alle coordinate:* $D' = A + C - B = (2, 0)$.

d) *Si'.* e) *Si': entrambi i vettori hanno coordinate* $(-2, -1)$. □

Esercizio 5. a) Disegnare il vettore $\vec{v}$ che ha coordinate $(2, 1)$ ed è applicato nel punto $A = (1, -3)$. (Per definizione, $\vec{v}$ è equipollente al vettore che congiunge l'origine e il punto $(2, 1)$).

b) Calcolare le coordinate del vertice di $\vec{v}$.

Soluzione. b) *Se* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ *allora deve risultare* $B - A = (2, 1)$ *dunque* $B = (3, -2)$. □

Esercizio 6. Nel piano sono date le rette

$$r_1 : x - y + 2 = 0, \quad r_2 : kx - 2y + 1 = 0.$$

a) Per quali valori di k le rette risultano parallele?

b) Per quali valori di k le rette si incontrano in un punto sull'asse x?

Soluzione. a) *Applicando la condizione di parallelismo, si ha* $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & -2 \end{vmatrix} = 0$ *se e solo se* $k = 2$.

b) *L'asse* x *ha equazione* $y = 0$. *Ponendo* $y = 0$ *nelle equazioni delle rette si ottiene* $x = -2$ *e* $k = \frac{1}{2}$. $\square$

Esercizio 7. Nel piano sono dati i punti $A = (2, 1), B = (-1, 5), C = (5, -3)$.

a) Stabilire se i tre punti sono allineati; in caso affermativo, determinare l'equazione della retta che li contiene.

b) Trovare le coordinate del punto D tale che il vettore $\overrightarrow{OD}$ sia equipollente al vettore $\overrightarrow{AB}$.

c) Trovare le coordinate del punto E tale che il vettore $\overrightarrow{BE}$ sia equipollente al vettore $\overrightarrow{OA}$.

Soluzione. a) *I tre punti sono allineati, tutti appartenenti alla retta* $4x + 3y - 11 = 0$. b) D *ha coordinate* $B - A = (-3, 4)$. c) *Si deve avere* $E - B = A - O$ *dunque* $E = A + B = (1, 6)$. $\square$

Esercizio 8. Nel piano sono dati la retta $r : x - 2y + 5 = 0$ e i punti $A = (1, 4), B = (k, 3)$.

a) Per quali valori di k il punto B appartiene a r?

b) Per quali valori di k il vettore $\overrightarrow{AB}$ è parallelo a r?

Soluzione. a) *Basta sostituire le coordinate di* B *nell'equazione della retta. Si ottiene* $k = 1$.
b) *Le equazioni parametriche di* r *sono*

$$\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t \end{cases}$$

e i parametri direttori di r *sono proporzionali a* $(2, 1)$. *Basta quindi imporre che le coordinate di* $\overrightarrow{AB}$, *cioè* $(k - 1, -1)$, *siano proporzionali a* $(2, 1)$:

$$\begin{vmatrix} k-1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

da cui otteniamo l'unico valore $k = -1$. $\square$

Esercizio 9. Nel piano sono dati i punti $A = (-1, 1), B = (2, 3), C = (0, -4)$.

a) Verificare che i punti non sono allineati.

b) Disegnare il vettore $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ e calcolare le coordinate del suo vertice.

c) Determinare l'equazione della retta passante per C e parallela al vettore $\overrightarrow{AB}$.

Soluzione. a) *I vettori* $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$ *e* $\overrightarrow{AC} = (1, -5)$ *non sono paralleli, dunque i punti* A, B, C *non sono allineati.* b) *Il vertice ha coordinate* $B + C - A = (3, -2)$. c) $2x - 3y - 12 = 0$. $\square$

Esercizio 10. Consideriamo le rette $r : ax + by + c = 0$ e $r' : a'x + b'y + c' = 0$, e le matrici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$. Dare un'interpretazione geometrica di ciascuna delle seguenti condizioni:

a) $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 1$.

b) $\mathrm{rk}A = 1, \mathrm{rk}A' = 2$.

c) $\mathrm{rk}A = \mathrm{rk}A' = 2$.

Soluzione. Si applica il teorema di Rouché-Capelli al sistema $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$.

a) *Le rette coincidono.* b) *Le rette sono parallele distinte.* c) *Le rette si incontrano in un punto.* $\square$

Esercizio 11. Sono dati i punti del piano $A = (1, 0), B = (3, 2), C = (-2, 1)$. Determinare:

a) L'equazione cartesiana della retta r passante per A e perpendicolare alla retta per i punti B e C.

b) L'equazione cartesiana della retta r' passante per C e parallela alla retta per i punti A e B.

c) L'eventuale intersezione delle rette r e r'.

Soluzione. a) *La retta generica perpendicolare a* $\overrightarrow{BC}$ *ha equazione* $5x + y + k = 0$. *Passa per* A *se e solo se* $k = -5$. *Dunque* $r : 5x + y - 5 = 0$. b) $r' : x - y + 3 = 0$. c) $r \cap r' = (\frac{1}{3}, \frac{10}{3})$. $\square$

Esercizio 12. Dato il punto $A = (1, -1)$ e la retta $r : x - y - 5 = 0$, determinare:

a) La proiezione ortogonale di A sulla retta r.

b) La distanza di A da r.

c) Il punto A', simmetrico di A rispetto alla retta r.

Soluzione. a) *Il punto* H, *proiezione ortogonale di* A *su* r, *è l'intersezione della retta* r *con la*

retta r' passante per A e ortogonale a r. Poiché $r' : x + y = 0$ si ottiene $H = (\frac{5}{2}, -\frac{5}{2})$.
b) *La distanza di A da r uguaglia la distanza di A dalla proiezione ortogonale H. Quindi $d(A, r) = \frac{3}{\sqrt{2}}$.*
c) *Se A' è il simmetrico di A rispetto a r, allora il punto H della parte* a) *è il punto medio del segmento AA'. Dunque $A' = (4, -4)$.* $\square$

Esercizio 13. Sono dati i punti del piano $A = (1, 0), B = (3, 2), C = (-2, 1)$. Determinare:
a) L'insieme dei punti del piano equidistanti dai punti A e B.
b) L'insieme dei punti del piano equidistanti dai punti A, B e C.

Soluzione. a) *L'insieme richiesto è l'asse del segmento AB, che è la retta passante per il punto medio del segmento AB e ortogonale ad AB. Tale retta ha equazione $x + y - 3 = 0$.*
b) *L'insieme cercato consiste di un solo punto D, che è anche il centro dell'unica circonferenza passante per i punti A, B, C. Il punto D si ottiene allora come intersezione dell'asse di AB, di equazione $x + y - 3 = 0$, con l'asse di AC, di equazione $3x - y + 2 = 0$. Dunque $D = (\frac{1}{4}, \frac{11}{4})$.* $\square$

Esercizio 14. Si consideri il triangolo T di vertici $A = (1, 0), B = (3, 2), C = (-2, 1)$.
a) Calcolare il perimetro di T.
b) Calcolare l'area di T.
c) Calcolare il coseno di ciascuno degli angoli di T.

Soluzione. Consideriamo i vettori $\overrightarrow{AB} = (2, 2), \overrightarrow{AC} = (-3, 1), \overrightarrow{BC} = (-5, -1)$.
a) *Il perimetro è dato da $\|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{AC}\| + \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{8} + \sqrt{10} + \sqrt{26}$.*
b) *L'area è la metà dell'area del parallelogramma sui vettori $\overrightarrow{AB} = (2, 2), \overrightarrow{AC} = (-3, 1)$. Dunque:*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 10 \end{vmatrix}} = 4.$$

c) *Il coseno dell'angolo in A è dato dalla formula:*

$$\cos\theta_A = \frac{\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{AC}\|} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Analogamente si trova $\cos\theta_B = \frac{3}{\sqrt{13}}, \cos\theta_C = \frac{7}{\sqrt{65}}$. $\square$

Esercizio 15. Sono dati la retta $r : x - y - 2 = 0$ e i punti $O = (0, 0)$ e $A = (4, 1)$.
a) Determinare gli eventuali punti P sulla retta r tali che il triangolo di vertici P, O, A sia rettangolo in P.
b) Determinare gli eventuali punti P sulla retta r equidistanti da O e A.

Soluzione. a) *Il punto mobile su r ha coordinate $P = (t + 2, t)$. Il triangolo è rettangolo in P se e solo se l'angolo tra i vettori $\overrightarrow{PO}$ e $\overrightarrow{PA}$ è retto, quindi se e solo se il prodotto scalare $\langle\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{PA}\rangle = 0$. Ora $\overrightarrow{PO} = (t+2, t)$ e $\overrightarrow{PA} = (t-2, t-1)$, e otteniamo l'equazione $2t^2 - t - 4 = 0$ da cui i valori*

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{33}}{4}, \quad t_2 = \frac{1 - \sqrt{33}}{4},$$

in corrispondenza dei quali avremo due punti che verificano le condizioni: $P_1 = (t_1+2, t_1), P_2 = (t_2 + 2, t_2)$.
b) *I punti su r equidistanti da O e A sono dati dall'intersezione della retta r con l'asse del segmento OA, che ha equazione $8x + 2y - 17 = 0$. Si ottiene l'unico punto $(\frac{21}{10}, \frac{1}{10})$.* □

Esercizio 16. a) Data la retta $r : x - y - 2 = 0$, disegnare l'insieme dei punti del piano $P = (x, y)$ che verificano la disequazione $x - y - 2 \leq 0$.
b) Disegnare l'insieme dei punti del piano che verificano tutte le disequazioni:

$$\begin{cases} x - y - 2 < 0 \\ x > 0 \\ x + y - 4 < 0. \end{cases}$$

Soluzione. a) *È il semipiano chiuso delimitato dalla retta $x - y - 2 = 0$ e contenente l'origine.*
b) *È l'insieme dei punti interni del triangolo di vertici $(0, -2), (3, 1), (0, 4)$.*□

Esercizio 17. Siano $A = (1, 2), B = (2, 1)$ due punti del piano e sia r la retta di equazioni parametriche $r : \begin{cases} x = t \\ y = t - 3 \end{cases}$. Determinare
a) Gli eventuali punti P sulla retta r tali che A, B, P risultino allineati.
b) Gli eventuali punti Q sulla retta r tali che il triangolo di vertici A, B, Q abbia area 2.

Soluzione. a) *Il punto è unico, ed è l'intersezione di r con la retta passante per A e B. Si ottiene $P = (3, 0)$.*

b) *Il punto mobile su r ha coordinate $P = (t, t-3)$. Si ha $\overrightarrow{AB} = (1, -1)$ mentre $\overrightarrow{AP} = (t-1, t-5)$. L'area del triangolo di vertici A, B, P vale*

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \rangle & \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP} \rangle \\ \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP} \rangle & \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AP} \rangle \end{vmatrix}} = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2t^2 - 12t + 26 \end{vmatrix}} = |t-3|.$$

e assume il valore 2 quando $|t-3| = 2$, cioè per $t = 1$ e $t = 5$. I punti cercati sono $(5, 2), (1, -2)$.

□