Corso di Geometria 2010-11
BIAR, BSIR
Esercizi I

Esercizio 1. Risolvere le seguenti equazioni lineari nelle incognite indicate, descrivendo in ciascun caso l'insieme delle soluzioni:

a) $x + 4y = 5$ nelle incognite x, y.

b) $x + 4y = 5$ nelle incognite x, y, z.

c) $x_1 + x_3 - 2x_4 = 0$ nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare $S : \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ nelle incognite x, y, z.

a) Quale delle seguenti terne: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è una soluzione di S?

b) Per quali valori del parametro $k \in \mathbf{R}$ la terna $\begin{pmatrix} k \\ k+2 \\ -2 \end{pmatrix}$ è una soluzione del sistema S?

Esercizio 3. Per ciascuna delle seguenti matrici, stabilire se è a scalini oppure no:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4. Risolvere i seguenti sistemi lineari a scalini:

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + 2z = 1 \\ 2z = 3 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_4 = 3 \end{cases}$$

In ciascun caso, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende.

Esercizio 5. Si considerino le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Usando l'algoritmo di Gauss, ridurre ciascuna delle matrici A_i a una matrice a scalini $\tilde{A}_i$.

Esercizio 6. Si considerino le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Usando l'algoritmo di Gauss, ridurre ciascuna delle matrici A_i a una matrice a scalini $\tilde{A}_i$.

Esercizio 7. Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y:

$$S_1 : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \quad S_2 : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ -2x + 4y = 2 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende.

Esercizio 8. Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x, y, z:

$$S_1 : \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} y - 3z = 0 \\ x + 2z = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases} \quad S_3 : \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende. (Parte del lavoro è già stato fatto nell'esercizio 5).

Esercizio 9. Risolvere i seguenti sistemi lineari nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4:

$$S_1 : \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}, \quad S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 + x_3 - x_4 = -3 \end{cases}$$

In ciascun caso, stabilire se il sistema è compatibile; se lo è, determinare l'insieme delle soluzioni e stabilire da quanti parametri dipende. (Parte del lavoro è già stato fatto nell'esercizio 6).

Esercizio 10. Si consideri l'insieme M costituito dalle terne $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$ tali che $\alpha+\beta+\gamma=8$ e $\alpha+\beta-\gamma=0$.

a) Dimostrare che M è un insieme infinito, dipendente da un parametro reale.

b) Trovare le terne $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in M$ per la quali $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=32$.

c) Trovare la terna $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in M$ per la quale $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ assume il valore minimo.

Esercizio 11. Date $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, trovare l'unica matrice X di tipo 2×2 tale che $2A+3X=4B$.

Esercizio 12. Decomporre la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ nella somma di una matrice simmetrica e una matrice antisimmetrica.

Esercizio 13. Dati p numeri reali $r_1,\dots,r_p \in \mathbf{R}$, comsideriamo la matrice A, di tipo $p\times p$, tale che $a_{ij}=(-1)^{i+j}r_ir_j$.

a) È vero che A è simmetrica?

b) Scrivere esplicitamente tale matrice se $r_1=1, r_2=2, r_3=3, r_4=4$.

Esercizio 14. Data la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$:

a) Determinare tutte le matrici $X\in M(2,2,\mathbf{R})$ tali che $AX=0$.

b) Determinare tutte le matrici $Y\in M(2,2,\mathbf{R})$ tali che $YA=0$.

Esercizio 15. a) Data la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ trovare (se possibile) una matrice $X\in M(2,2,\mathbf{R})$ tale che $AX=I$.

b) Data la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ trovare (se possibile) una matrice $X\in M(2,2,\mathbf{R})$ tale che $AX=I$.