Parte 12a. Trasformazioni del piano. Forme quadratiche

A. Savo − Appunti del Corso di Geometria 2013-14

Indice delle sezioni

1 Trasformazioni del piano

Una *trasformazione del piano* è un'applicazione dall'insieme dei punti del piano in sé stesso. Introdotto un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O; x, y)$ ogni punto si rappresenta con una coppia di numeri reali. Per convenienza, scriveremo spesso le coordinate di un punto in forma colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ne segue che una trasformazione del piano si identifica con un'applicazione

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

e scriveremo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

f dunque trasforma il punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nel punto $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Possiamo anche interpretare f come una trasformazione di vettori, identificando il punto P con il vettore $\overrightarrow{OP}$ che unisce l'origine a P.

Una trasformazione del piano si dice un' *isometria* se conserva la distanza, se cioè:

$$d(P_1, P_2) = d(f(P_1), f(P_2)),$$

per ogni coppia di punti P_1 e P_2.

Di particolare importanza sono le *trasformazioni lineari* del piano. Una trasformazione lineare si scrive

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

è la matrice canonica di f.

1.1 Traslazione

La *traslazione di vettore* $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ è la trasformazione

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+\alpha \\ y+\beta \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x' = x+\alpha \\ y' = y+\beta \end{cases}.$$

Essa trasforma l'origine nel punto $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Come trasformazione di vettori, f non è dunque lineare. Si verifica facilmente che f è un'isometria.

1.2 Rotazione

Consideriamo ora la rotazione di un angolo di θ radianti intorno all'origine (in senso antiorario). Essa trasforma il vettore $\overrightarrow{OP}$ nel vettore $\overrightarrow{OP'}$ ottenuto ruotando $\overrightarrow{OP}$ di un angolo θ. Se $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si vede facilmente che le coordinate (x', y') di P' sono date da:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}.$$

Dunque f si scrive:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix},$$

e risulta lineare, con matrice canonica

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che $M^tM = I$, dunque:

- la matrice canonica di una rotazione è ortogonale.

Inoltre, è anche evidente che una rotazione conserva la distanza, ed è dunque un'isometria.

Esempio La matrice canonica di una rotazione di angolo $\theta = \pi/3$ è:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

e le equazioni della trasformazione sono:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}(x - \sqrt{3}y) \\ y' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \end{cases}$$

1.3 Proiezione ortogonale su una retta

Sia r una retta del piano, e P un punto. Possiamo allora considerare la proiezione ortogonale di P su r: questo definisce una trasformazione del piano. Se r passa per l'origine, la proiezione ortogonale su r è una trasformazione lineare, che ci proponiamo di scrivere esplicitamente.

Sia dunque r una retta passante per l'origine; r è allora un sottospazio di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1. Se il vettore colonna u è una base ortonormale di r, sappiamo che

$$f(v) = \langle v, u\rangle u,$$

dove $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è un vettore di $\mathbf{R}^2$. Un calcolo mostra che la matrice canonica di f è data da:

$$A = uu^t.$$

Risulta che A è sempre simmetrica.

Esempio Sia $r : 3x - y = 0$. Ci proponiamo di scrivere la matrice canonica della trasformazione f, proiezione ortogonale su r. Una base di r è formata dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, una base ortonormale di r è dunque:

$$u = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che la matrice di f è:

$$A = uu^t = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}(1, 3) = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che f si scrive:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}x+3y\\3x+9y\end{pmatrix}.$$

Ad esempio, la proiezione ortogonale di $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ su r è data dal vettore $f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}\\\frac{6}{5}\end{pmatrix}$. Notiamo che il nucleo di f ha equazione $x+3y=0$, ed è quindi $r^{\perp}$, il sottospazio complemento ortogonale di r (retta per l'origine ortogonale a r). Questo è sempre vero:

- Se f è la proiezione ortogonale su una retta r, allora $\mathrm{Ker} f=r^{\perp}$.

Infine, si ha sempre $f^2=f$, e quindi, per la matrice canonica ad esso associata, risulta $A^2=A$ (per la definizione di f^2, vedi la sezione 1.5).

1.4 Riflessione attorno a una retta

Sia r una retta del piano, e sia f la trasformazione che associa a P il punto P', simmetrico di P rispetto a r: allora f è detta la *riflessione attorno a r*. È chiaro che f è un'isometria; inoltre si verifica che f è lineare se e solo se r passa per l'origine.

Esempio La simmetria rispetto all'asse x si scrive:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}\quad\text{ovvero}\quad\begin{cases}x'=x\\y'=-y\end{cases}$$

e la matrice canonica di f è $M=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Notiamo che M è una matrice ortogonale.

Vediamo ora di scrivere la matrice canonica della riflessione f attorno a una retta r passante per l'origine. Sia g la proiezione ortogonale su r. È facile verificare che si ha:

$$2g(v)=v+f(v)$$

per ogni $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Dunque $f=2g-I$, dove I è la trasfomazione identica. Se A è la matrice canonica della riflessione, e B è la matrice canonica della proiezione ortogonale, si ha dunque:

$$A=2B-I.$$

Esercizio Verificare che la matrice di una riflessione è simmetrica e ortogonale, e soddisfa

$A^2=I$.

Esempio Determiniamo la matrice canonica A della riflessione attorno alla retta $r : 3x - y$. Nella sezione precedente abbiamo visto che la matrice della proiezione su r è:

$$B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$A = 2B - I = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.5 Trasformazioni composte

Siano ora f e g due trasformazioni del piano. Definiamo la *trasformazione composta* $f \circ g$ nel seguente modo:

$$f \circ g(P) = f(g(P)).$$

Dunque, $f \circ g$ si ottiene applicando, nell'ordine, prima g e poi f. È chiaro che, in generale, $f \circ g \neq g \circ f$. Porremo inoltre $f^2 = f \circ f$ e piú in generale

$$f^k = f \circ \cdots \circ f \quad \text{(iterata } k \text{ volte)}.$$

Proposizione *Siano f e g due trasformazioni lineari. Allora anche la composta $f \circ g$ è lineare. Inoltre, se A e B sono, rispettivamente, le matrici canoniche di f e g, allora la matrice canonica della composta $f \circ g$ è il prodotto AB. In particolare, la matrice di f^k è A^k.*

La dimostrazione è immediata:

$$f \circ g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = f(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = AB\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Esempio Determiniamo la trasformazione composta $f \circ g$ se

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

Le matrici canoniche sono, rispettivamente, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dunque la matrice di $f \circ g$ è:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

e si ha:

$$f \circ g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + y \end{pmatrix}.$$

Diremo che f è *invertibile* se è iniettiva e suriettiva; in tal caso esiste una seconda trasformazione g tale che $f \circ g = I$, dove I è trasformazione identica: $I(P) = P$ per ogni punto P. Diremo allora che g è l'*inversa* di f, e scriveremo:

$$g = f^{-1}.$$

Dunque, l'inversa di f (se esiste) ha la seguente proprietà:

$$f \circ f^{-1} = I.$$

Notiamo che la trasformazione identica I è lineare, con matrice canonica $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identità).

Come conseguenza della proposizione precedente, si ha:

Corollario *Una trasformazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è invertibile se e solo se la sua matrice canonica A è invertibile, quindi se e solo se $\det A \neq 0$. In tal caso la matrice canonica dell'inversa di f (cioè di f^{-1}) è A^{-1}.*

Esempio Sia $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + 3y \end{pmatrix}$, con matrice canonica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = 7 \neq 0$, f è invertibile; inoltre

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

dunque

$$f^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

Esempio Come abbiamo visto, la rotazione f di angolo θ ha matrice canonica

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Siccome M è ortogonale, si ha

$$M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Notiamo che M^{-1} si ottiene da M cambiando θ in $-\theta$. Dunque l'inversa di f è la rotazione di angolo $-\theta$ (com'era, del resto, ovvio).

Esempio La traslazione di vettore $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, definita da $f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+\alpha\\ y+\beta\end{pmatrix}$ non è lineare, ma è invertibile. Si vede subito che la sua inversa è la traslazione di vettore $\begin{pmatrix}-\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}$:

$$f^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-\alpha\\ y-\beta\end{pmatrix}.$$

1.6 Trasformazioni ortogonali

Sappiamo che M è una matrice ortogonale se e solo se le colonne di M formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$. Una matrice ortogonale trasforma basi ortonormali in basi ortonormali. Vogliamo ora classificare le matrici ortogonali di ordine 2.

Proposizione *Una matrice 2×2 è ortogonale se e solo se è di uno dei due tipi seguenti:*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} & \textit{con } \theta\in\mathbf{R},\\ \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} & \textit{con } \alpha\in\mathbf{R}.\end{cases}$$

Dimostrazione. Le colonne di M formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$. Supponiamo che la prima colonna sia $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$. Allora $a^2+b^2=1$ e si dovrà avere

$$M = \begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}, \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}.$$

Ponendo $a=\cos\theta, b=\sin\theta$ (risp. $a=\cos\alpha, b=\sin\alpha$) otteniamo l'asserto. $\square$

Notiamo che, nel primo caso, M ha determinante 1 e rappresenta la rotazione di angolo θ. Nel secondo caso, M ha determinante -1 e rappresenta la seguente trasformazione: simmetria rispetto all'asse x seguita dalla rotazione di angolo α. Infatti

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Diremo che f è una *trasformazione ortogonale* del piano se è lineare, ed è rappresentata da una matrice ortogonale. Risulta allora che ogni trasformazione ortogonale è di uno dei due tipi descritti nella proposizione precedente.

2 Cambiamento di coordinate

Sappiamo che, nel piano, un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ è individuato da un'origine O e da una base ortonormale $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ di V_0^2. Le coordinate di un punto P sono date dalla coppia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dove $\overrightarrow{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Scriveremo anche:

$$\mathcal{R} = (0; x, y).$$

Sia ora $\mathcal{R}'$ un secondo riferimento cartesiano, individuato da una nuova origine O' e da una seconda base ortonormale $(\vec{e_1}', \vec{e_2}')$. Il passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ si ottiene componendo la trasformazione ortogonale che porta la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ nella base $(\vec{e_1}', \vec{e_2}')$ (descritta da una matrice ortogonale M) con la traslazione che porta O in O'.

Sia P un punto. Vogliamo ora esprimere la relazione fra $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le coordinate di P rispetto a $\mathcal{R}$, e $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, le coordinate di P rispetto a $\mathcal{R}'$. Supponiamo che O' abbia coordinate $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{R}$, e sia M la matrice di passaggio da $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ a $(\vec{e_1}', \vec{e_2}')$. Allora si dimostra che

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Poiché M è ortogonale, si avrà $M^t = M^{-1}$ e dunque dalla formula precedente, moltiplicando a sinistra per M, si ottengono le formule inverse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Le formule (1) e (2) sono dette *formule del cambiamento di coordinate*. Esplicitamente, se $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ allora:

$$\begin{cases} x = m_{11}x' + m_{12}y' + x_0 \\ y = m_{21}x' + m_{22}y' + y_0 \end{cases} \tag{3}$$

Le formule si esprimono più semplicemente con la matrice 3×3:

$$T = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & x_0 \\ m_{21} & m_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta allora che le formule (3) si scrivono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio Scrivere le formule del cambiamento di coordinate da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, se la nuova origine O' ha coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{R}$ e gli assi x', y' si ottengono ruotando gli assi x, y di un angolo $\theta = \pi/4$.
In altre parole, il nuovo riferimento si ottiene componendo la rotazione di angolo $\pi/4$ seguita dalla traslazione definita dal vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. La matrice della rotazione è

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha poi $x_0 = 2, y_0 = 3$. Dunque

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}.$$

Esplicitamente:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y-5) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y-1) \end{cases}$$

Notiamo che i nuovi assi coordinati hanno equazione, in $\mathcal{R}$:

$$\text{asse } x' : x - y + 1 = 0, \quad \text{asse } y' : x + y - 5 = 0.$$

Le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') + 2 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') + 3 \end{cases} \tag{4}$$

descritte anche dalla matrice 3×3:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un opportuno cambiamento di coordinate semplifica lo studio delle curve. Consideriamo la curva $\mathcal{C}$ descritta, nelle coordinate x, y, dall'equazione

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0.$$

Nel nuovo riferimento $(O'; x', y')$ dell'esempio precedente, la curva avrà un'equazione diversa: quale? Usando le trasformazioni inverse (4) si ottiene, dopo qualche calcolo, l'equazione:

$$x'^2 + y'^2 - 9 = 0,$$

evidentemente più semplice della precedente, e che rappresenta la circonferenza di centro O' e raggio 3.

3 Forme quadratiche in due variabili

Una forma quadratica nelle variabili x, y è una funzione $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ del tipo:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy. \tag{5}$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbf{R}$. Dunque, q è un *polinomio omogeneo* di *secondo grado* in x, y. Introduciamo la matrice simmetrica

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

detta *matrice della forma quadratica.* Notiamo che sulla diagonale principale ci sono i coefficienti dei termini x^2 e y^2, e sulla diagonale secondaria compare il coefficiente del termine misto xy diviso 2.

L'utilità della matrice Q sta nel fatto che la (5) si scrive, in forma matriciale, nel modo seguente:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Esempio La forma quadratica $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 - 7y^2 + 12xy$ ha matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.

Esempio La forma quadratica $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x^2 + 5y^2 - 2xy$ ha matrice $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Esempio La forma quadratica $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 - 3y^2$ ha matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Diremo che q è *diagonale* se la sua matrice è diagonale. Questo avviene se e solo se il coefficiente del termine misto è nullo, in modo che q si scrive:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda x^2 + \mu y^2,$$

con $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Negli esempi precedenti, solo la terza forma quadratica è in forma diagonale.

Nel prossimo teorema dimostriamo che, usando un'opportuna trasformazione ortogonale, ogni forma quadratica assume forma diagonale. Questo presenta diversi vantaggi, come vedremo studiando le coniche.

Teorema *Sia* $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *una forma quadratica, con matrice (simmetrica)* Q. *Siano* λ, μ *gli autovalori di* Q, *e sia* M *una matrice ortogonale che diagonalizza* Q, *nel senso che:*

$$M^t Q M = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Allora, se si pone $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *la forma* q *si scrive:*

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda X^2 + \mu Y^2.$$

Dimostrazione. È una verifica immediata. Infatti, partiamo dall'espressione matriciale

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Se $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ si ha $Q = MDM^t$ e quindi:

$$\begin{aligned} q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x, y) Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x, y) MDM^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (X, Y) D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= (X, Y) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \lambda X^2 + \mu Y^2 \end{aligned}$$

□

Diagonalizziamo le forme quadratiche degli esempi precedenti.

Esempio Sia $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 - 7y^2 + 12xy$. La sua matrice è $Q = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$. Risulta che Q ha autovalori $\lambda = 5, \mu = -10$. Dunque

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5X^2 - 10Y^2,$$

dove X e Y dipendono linearmente da x, y. Per vedere come, dobbiamo trovare una base ortonormale di autovettori e quindi una matrice M che diagonalizza Q. Gli autospazi di Q sono: $E(5) : x - 2y = 0, E(-10) : 2x + y = 0$, e possiamo prendere

$$M = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Esplicitamente

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y) \end{cases}$$

Quindi il risultato del calcolo è l'aver mostrato che

$$2x^2 - 7y^2 + 12xy = (2x + y)^2 - 2(x - 2y)^2.$$

Notiamo infine che q si spezza in un prodotto di fattori lineari:

$$2x^2 - 7y^2 + 12xy = \Big((2 - \sqrt{2})x + (1 + 2\sqrt{2})y\Big)\Big((2 + \sqrt{2})x + (1 - 2\sqrt{2})y\Big).$$

Esempio Sia $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x^2 + 5y^2 - 2xy$; quindi $Q = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Gli autovalori di Q sono $\lambda = 6, \mu = 4$, quindi con un'opportuna trasformazione ortogonale si ha:

$$5x^2 + 5y^2 - 2xy = 6X^2 + 4Y^2.$$

Gli autospazi sono $E(6) : x + y = 0$, $E(4) : x - y = 0$, e possiamo prendere $M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, quindi $M^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ da cui otteniamo le formule:

$$\begin{cases} X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ Y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases}.$$

3.1 Carattere di una forma quadratica

Notiamo che, se $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ è una forma quadratica, si ha sempre $q\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = 0$. Ha interesse studiare il segno che q assume sui vettori non nulli, in particolare, se q cambia segno. Diremo che q è:

- *definita positiva* se $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} > 0$ per ogni $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$;
- *definita negativa* se $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} < 0$ per ogni $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$;
- *semi-definita positiva* se $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \geq 0$ per ogni $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$;
- *semi-definita negativa* se $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \leq 0$ per ogni $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$;
- *indefinita* se $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ assume valori sia positivi che negativi (se cioè cambia di segno).

È chiaro che il carattere di q si determina facilmente se ne conosciamo una forma diagonale.

Esempio Sia $q = 2x^2 - 7y^2 + 12xy$. Una forma diagonale è:

$$q = 5X^2 - 10Y^2,$$

quindi q è indefinita: assume valori positivi se $Y = 0$ e valori negativi se $X = 0$. In generale, se i due autovalori di Q hanno segno discorde: $\lambda\mu < 0$, la forma quadratica sarà indefinita.

Esempio Sia $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 5x^2 + 5y^2 - 2xy$. Abbiamo visto che:

$$q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 6X^2 + 4Y^2.$$

Dunque $q \geq 0$; inoltre $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0$ implica $X = Y = 0$, e di conseguenza $x = y = 0$ (poiché $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$). In conclusione, q è definita positiva.

In generale, q sarà definita positiva se e solo se i due autovalori di Q sono entrambi positivi.

Infine, q sarà semi-definita se e solo se uno dei due autovalori è nullo.

Si può stabilire il carattere di una forma quadratica solamente esaminando il determinante e la traccia della sua matrice Q. A tale scopo, premettiamo la seguente

Proposizione *Sia Q una matrice 2×2 con autovalori λ, μ. Allora:*

$$\mathrm{tr}Q = \lambda + \mu; \quad \det Q = \lambda\mu.$$

Dimostrazione. Sia $p_Q(x)$ il polinomio caratteristico di Q. Poiché λ e μ sono autovalori, si avrà:

$$p_Q(x) = (x - \lambda)(x - \mu) = x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu.$$

D'altra parte sappiamo che il polinomio caratteristico di Q si scrive:

$$p_Q(x) = x^2 - (\mathrm{tr}Q)x + \det Q.$$

Uguagliando i coefficienti otteniamo l'asserto. $\square$

Teorema *Sia $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ una forma quadratica con matrice Q. Allora q è:*

a) *definita positiva se e solo se* $\det Q > 0$ *e* $\mathrm{tr}Q > 0$*;*

b) *definita negativa se e solo se* $\det Q > 0$ *e* $\mathrm{tr}Q < 0$*;*

c) *indefinita se e solo se* $\det Q < 0$*;*

d) *semi-definita positiva se e solo se* $\det Q = 0$ *e* $\mathrm{tr}Q > 0$*;*

e) *semi-definita negativa se e solo se* $\det Q = 0$ *e* $\mathrm{tr}Q < 0$*.*

Dimostrazione. Diagonalizzando q possiamo scrivere:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda X^2 + \mu Y^2,$$

dove λ e μ sono gli autovalori di Q.

a) q è definita positiva se e solo se λ e μ sono entrambi positivi; per la proposizione, ciò accade se e solo $\det Q = \lambda\mu > 0$ e $\mathrm{tr}Q = \lambda + \mu > 0$.

Negli altri casi, si procede in modo analogo. $\square$

4 Ellisse

Siano a, c due numeri reali positivi, con $a > c$, e fissiamo nel piano due punti F_1, F_2 a distanza $2c$, che chiameremo *fuochi*.

Definizione *L'ellisse è il luogo dei punti del piano tali che la somma delle distanze di P da F_1 e F_2 sia costante, uguale a $2a$.*

Dunque la condizione affinché P appartenga all'ellisse è:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Vediamo ora di descrivere l'ellisse con un'equazione. Dobbiamo in primo luogo fissare un riferimento cartesiano opportuno. Fissiamo dunque l'origine O nel punto medio del segmento F_1F_2, e l'asse x come la retta per F_1 e F_2, orientata da F_1 a F_2. L'asse y dovrà dunque essere la retta ortogonale all'asse x passante per O. In tale riferimento, si avrà:

$$F_1 = (-c, 0),\ F_2 = (c, 0).$$

La condizione affinché $P = (x, y)$ appartenga all'ellisse è dunque:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

Con opportune manipolazioni algebriche si arriva all'equazione:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Ponendo $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (osserviamo che $a \geq b > 0$) arriviamo all'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

detta *equazione canonica* dell'ellisse.

Osservazione Se $a = b$ l'ellisse si riduce a una circonferenza. In tal caso $c = 0$ e i due fuochi coincidono con l'origine. Dunque, la circonferenza è un caso particolare di ellisse.

Vediamo alcune proprietà dell'ellisse $\mathcal{E}$. Le intersezioni con l'asse x sono i punti

$$A = (a, 0),\ A' = (-a, 0).$$

Le intersezioni con l'asse y sono date dai punti:

$$B = (0, b),\ B' = (0, -b).$$

I punti A, B, A', B' sono detti *vertici* dell'ellisse. Il segmento $A'A$, di lunghezza $2a$, è detto *asse maggiore* mentre il segmento $B'B$, di lunghezza $2b$, è detto *asse minore*. Ora osserviamo che

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

da cui otteniamo

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b.$$

L'ellisse è dunque una curva limitata, contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette

$$x = a, x = -a, y = b, y = -b$$

.

4.1 Simmetrie

Dall'equazione canonica vediamo che, se $P = (x, y)$ appartiene a $\mathcal{E}$ (dunque soddisfa l'equazione (7)), anche il suo simmetrico rispetto all'asse x appartiene a $\mathcal{E}$: infatti, poiché la variabile y viene elevata al quadrato, anche $P' = (x, -y)$ soddisfa la (7). Dunque $\mathcal{E}$ è simmetrica rispetto all'asse x. Per un motivo analogo si vede che $\mathcal{E}$ è simmetrica anche rispetto all'asse y, e dunque è simmetrica rispetto all'origine.

Basta dunque studiare il grafico di $\mathcal{E}$ nel primo quadrante, cioè quando x e y sono entrambi positivi. Possiamo allora descrivere $\mathcal{E}$ come grafico della funzione $y = f(x)$ ovvero

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

nell'intervallo in cui $0 < x < a$. Ora:

$$y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} < 0$$

e dunque, poiché $y' < 0$, si ha che y decresce su $(0, a)$. D'altra parte

$$y'' = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}} < 0,$$

da cui si vede che la concavità della curva è sempre rivolta verso il basso. Dalle simmetrie di $\mathcal{E}$ si vede dunque che il grafico dell'ellisse è del tipo in figura:

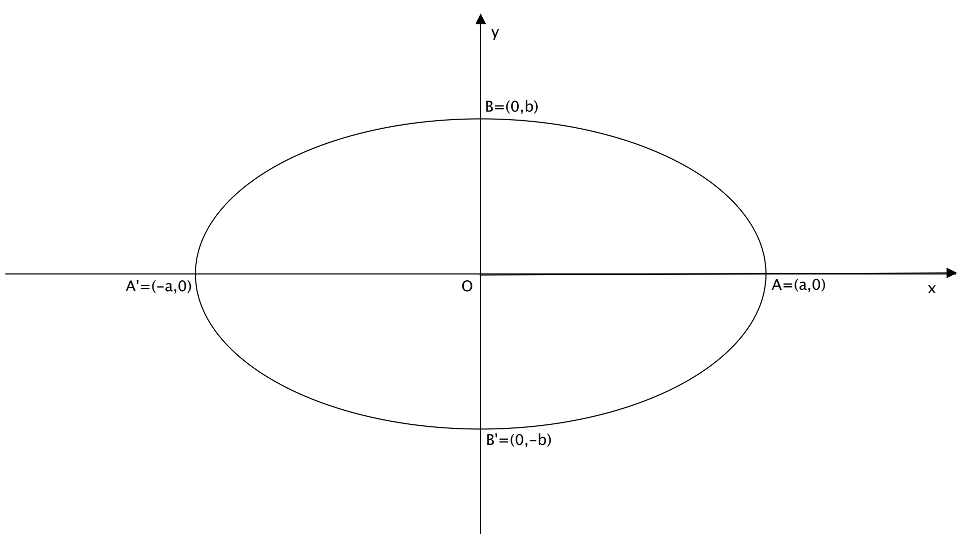

Figura 1: Grafico dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. I punti A, A', B, B' sono i vertici.

Infine, l'area racchiusa dall'ellisse vale

$$\mathcal{A} = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Ora, usando una opportuna sostituzione, risulta

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{\pi a^2}{4},$$

dunque l'area vale

$$\mathcal{A} = \pi ab.$$

4.2 Eccentricità

Il numero

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

è detto *eccentricità* dell'ellisse. Si ha evidentemente

$$0 \leq e < 1.$$

Se $a = b$ l'eccentricità è nulla: in tal caso l'ellisse si riduce a una circonferenza di raggio a. Dunque l'eccentricità misura di quanto l'ellisse si discosti dall'essere una circonferenza: se e è vicino a 1, allora si vede che b dovrà essere molto piccolo rispetto ad a, e l'ellisse risulta molto allungata.

5 Iperbole

Siano a, c numeri positivi tali che $a < c$, e siano F_1, F_2 due punti fissati e tali che $d(F_1, F_2) = 2c$. L'iperbole $\mathcal{I}$ di fuochi F_1, F_2 è la curva del piano formata da tutti i punti P tali che

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Come nel caso dell'ellisse, fissiamo un riferimento cartesiano avente l'origine nel punto medio dei fuochi, e asse x contenente i fuochi, orientato come il segmento F_1F_2. Allora $P = (x, y)$ appartiene a $\mathcal{I}$ se e solo se:

$$|\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2}| = 2a.$$

Con manipolazioni algebriche, ponendo

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0$$

otterremo l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

detta *equazione canonica* dell'iperbole. Osserviamo che:

- l'iperbole è simmetrica rispetto agli assi, e quindi è simmetrica rispetto all'origine.
- $\mathcal{I}$ si svolge nelle parti del piano dove $x \geq a$ oppure $x \leq -a$.

In particolare, $\mathcal{I}$ non ha intersezione con l'asse y, mentre incontra l'asse x nei due punti $A_1 = (-a, 0)$, $\quad A_2 = (a, 0)$. Per tracciare il grafico, è sufficiente studiare la curva nel primo quadrante, (precisamente, dove $x \geq a$ e $y \geq 0$), dove si ha

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Si vede subito che $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$, dunque la curva si allontana all'infinito quando $x \to \infty$. Calcolando le derivate prima e seconda di y, si vede che y è sempre crescente e rivolge la concavità verso il basso. Si considerino le rette

$$\alpha_1 : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \alpha_2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

ottenute uguagliando a zero il primo membro dell'equazione canonica. Con metodi noti di analisi, si può verificare che α_1 è un asintoto obliquo della porzione di iperbole che giace nel primo quadrante. Per simmetria, risulta allora che α_1 e α_2 sono asintoti obliqui dell'iperbole, il cui grafico risulta quindi del tipo:

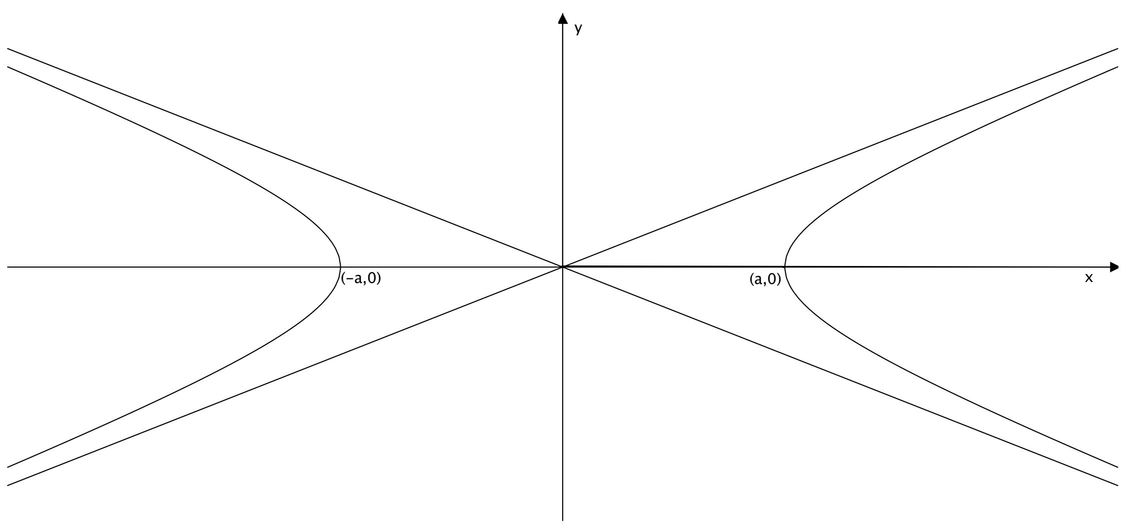

Figura 2: Grafico dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Le rette sono gli asintoti.

6 Parabola

Fissiamo un punto del piano, F, e una retta non passante per F, diciamo r. La *parabola* $\mathcal{P}$ di fuoco F e direttrice r è il luogo dei punti P tali che la distanza di P da r sia uguale alla distanza di P da F:

$$d(P, r) = d(P, F).$$

Vediamo qual'è un'opportuna equazione che descrive $\mathcal{P}$. Fissiamo l'asse x nella retta per F ortogonale a r, orientata da r a F, e l'origine O nel punto medio del segmento HF, dove H è la proiezione ortogonale di F su r.

Detta p la distanza di F da r, risulta allora che le coordinate di F sono $(p/2, 0)$ mentre la direttrice r ha equazione

$$r : x = -\frac{p}{2}.$$

Si vede subito che, affinché $P = (x, y)$ appartenga alla parabola, deve risultare $x \geq 0$; poiché la distanza di $P = (x, y)$ da r vale $|x + p/2|$ si ha la seguente condizione:

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|.$$

Elevando al quadrato ambo i membri si ottiene

$$y^2 = 2px$$

detta *equazione canonica* della parabola $\mathcal{P}$.

Poiché la parabola si svolge tutta nel semipiano $x \geq 0$, essa non ha centro di simmetria. L'unica simmetria di $\mathcal{P}$ è infatti quella rispetto all'asse x. Possiamo pero' studiare la parabola nel semipiano $y \geq 0$, e per ribaltamento rispetto all'asse x otterremo il suo grafico completo. Supponiamo quindi $y \geq 0$. Allora:

$$y = \sqrt{2px}.$$

Calcolando le derivate di y rispetto a x si vede che:

- la funzione y è sempre crescente, e il suo grafico rivolge sempre la concavita' verso il basso. Inoltre, ogni retta $y = a$ taglia la parabola in un unico punto, e quindi y tende all'infinito quando $x \to \infty$. Infine, y non ha asintoti.

Il grafico della parabola è illustrato nella figura che segue.

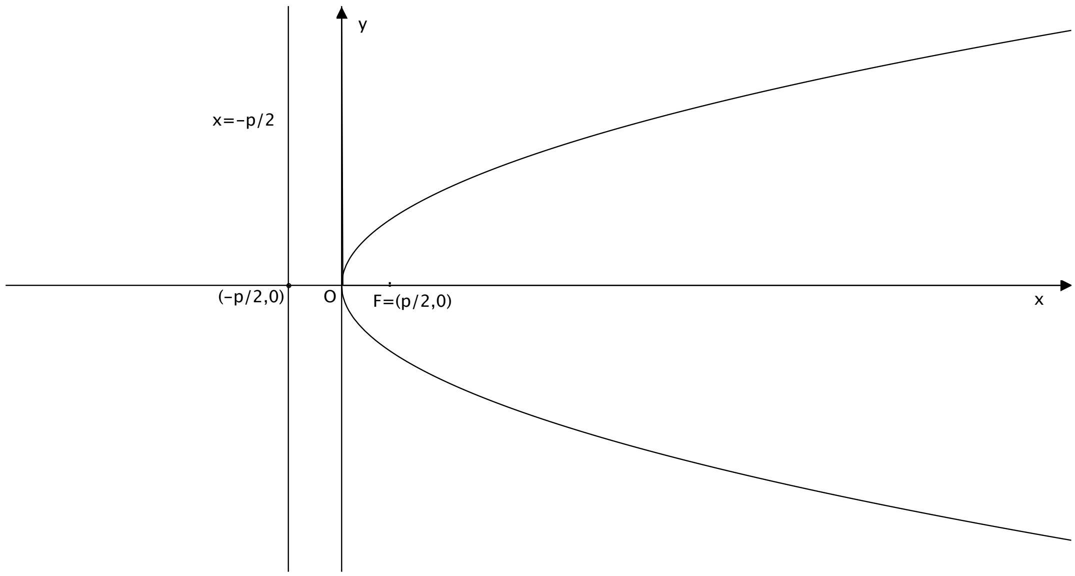

Figura 3: Grafico della parabola $y^2 = 2px$. La retta $x = -\frac{p}{2}$ è la direttrice, e il punto F è il fuoco.