# Parte 12a. Trasformazioni del piano. Forme quadratiche

A. Savo − Appunti del Corso di Geometria 2013-14

Indice delle sezioni



## 1 Trasformazioni del piano

Una *trasformazione del piano* è un'applicazione dall'insieme dei punti del piano in sé stesso. Introdotto un sistema di riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O; x, y)$ ogni punto si rappresenta con una coppia di numeri reali. Per convenienza, scriveremo spesso le coordinate di un punto in forma colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Ne segue che una trasformazione del piano si identifica con un'applicazione

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$$

e scriveremo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$f$ dunque trasforma il punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ nel punto $P' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Possiamo anche interpretare $f$ come una trasformazione di vettori, identificando il punto $P$ con il vettore $\overrightarrow{OP}$ che unisce l'origine a $P$.

Una trasformazione del piano si dice un' *isometria* se conserva la distanza, se cioè:

$$d(P_1, P_2) = d(f(P_1), f(P_2)),$$

per ogni coppia di punti $P_1$ e $P_2$.

Di particolare importanza sono le *trasformazioni lineari* del piano. Una trasformazione lineare si scrive

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

è la matrice canonica di $f$.

### 1.1 Traslazione

La *traslazione di vettore* $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ è la trasformazione

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \alpha \\ y + \beta \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x' = x + \alpha \\ y' = y + \beta \end{cases}.$$

Essa trasforma l'origine nel punto $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Come trasformazione di vettori, $f$ non è dunque lineare. Si verifica facilmente che $f$ è un'isometria.

### 1.2 Rotazione

Consideriamo ora la rotazione di un angolo di $\theta$ radianti intorno all'origine (in senso antiorario). Essa trasforma il vettore $\overrightarrow{OP}$ nel vettore $\overrightarrow{OP'}$ ottenuto ruotando $\overrightarrow{OP}$ di un angolo $\theta$. Se $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si vede facilmente che le coordinate $(x', y')$ di $P'$ sono date da:

$$\begin{cases} x' = x \cos\theta - y \sin\theta \\ y' = x \sin\theta + y \cos\theta \end{cases}.$$

Dunque $f$ si scrive:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\theta - y \sin\theta \\ x \sin\theta + y \cos\theta \end{pmatrix},$$

e risulta lineare, con matrice canonica

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si vede immediatamente che $M^t M = I$, dunque:

- la matrice canonica di una rotazione è ortogonale.

Inoltre, è anche evidente che una rotazione conserva la distanza, ed è dunque un'isometria.

**Esempio** La matrice canonica di una rotazione di angolo $\theta = \pi/3$ è:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix},$$

e le equazioni della trasformazione sono:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}y) \\ y' = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y) \end{cases}$$

## 1.3 Proiezione ortogonale su una retta

Sia $r$ una retta del piano, e $P$ un punto. Possiamo allora considerare la proiezione ortogonale di $P$ su $r$: questo definisce una trasformazione del piano. Se $r$ passa per l'origine, la proiezione ortogonale su $r$ è una trasformazione lineare, che ci proponiamo di scrivere esplicitamente.

Sia dunque $r$ una retta passante per l'origine; $r$ è allora un sottospazio di $\mathbf{R}^2$ di dimensione 1. Se il vettore colonna $u$ è una base ortonormale di $r$, sappiamo che

$$f(v) = \langle v, u \rangle u,$$

dove $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è un vettore di $\mathbf{R}^2$. Un calcolo mostra che la matrice canonica di $f$ è data da:

$$A = uu^t.$$

Risulta che $A$ è sempre simmetrica.

**Esempio** Sia $r : 3x - y = 0$. Ci proponiamo di scrivere la matrice canonica della trasformazione $f$, proiezione ortogonale su $r$. Una base di $r$ è formata dal vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, una base ortonormale di $r$ è dunque:

$$u = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che la matrice di $f$ è:

$$A = uu^t = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (1, 3) = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $f$ si scrive:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} x+3y \\ 3x+9y \end{pmatrix}.$$

Ad esempio, la proiezione ortogonale di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ su $r$ è data dal vettore $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$. Notiamo che il nucleo di $f$ ha equazione $x + 3y = 0$, ed è quindi $r^{\perp}$, il sottospazio complemento ortogonale di $r$ (retta per l'origine ortogonale a $r$). Questo è sempre vero:

- Se $f$ è la proiezione ortogonale su una retta $r$, allora $\mathrm{Ker} f = r^{\perp}$.

Infine, si ha sempre $f^2 = f$, e quindi, per la matrice canonica ad esso associata, risulta $A^2 = A$ (per la definizione di $f^2$, vedi la sezione 1.5).

## 1.4 Riflessione attorno a una retta

Sia $r$ una retta del piano, e sia $f$ la trasformazione che associa a $P$ il punto $P'$, simmetrico di $P$ rispetto a $r$: allora $f$ è detta la *riflessione attorno a $r$*. È chiaro che $f$ è un'isometria; inoltre si verifica che $f$ è lineare se e solo se $r$ passa per l'origine.

**Esempio** La simmetria rispetto all'asse $x$ si scrive:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

e la matrice canonica di $f$ è $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Notiamo che $M$ è una matrice ortogonale.

Vediamo ora di scrivere la matrice canonica della riflessione $f$ attorno a una retta $r$ passante per l'origine. Sia $g$ la proiezione ortogonale su $r$. È facile verificare che si ha:

$$2g(v) = v + f(v)$$

per ogni $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Dunque $f = 2g - I$, dove $I$ è la trasfomazione identica. Se $A$ è la matrice canonica della riflessione, e $B$ è la matrice canonica della proiezione ortogonale, si ha dunque:

$$A = 2B - I.$$

**Esercizio** Verificare che la matrice di una riflessione è simmetrica e ortogonale, e soddisfa

$A^2 = I$.

**Esempio** Determiniamo la matrice canonica $A$ della riflessione attorno alla retta $r : 3x-y$. Nella sezione precedente abbiamo visto che la matrice della proiezione su $r$ è:

$$B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$A = 2B - I = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

## 1.5 Trasformazioni composte

Siano ora $f$ e $g$ due trasformazioni del piano. Definiamo la *trasformazione composta* $f \circ g$ nel seguente modo:

$$f \circ g(P) = f(g(P)).$$

Dunque, $f \circ g$ si ottiene applicando, nell'ordine, prima $g$ e poi $f$. È chiaro che, in generale, $f \circ g \neq g \circ f$. Porremo inoltre $f^2 = f \circ f$ e piú in generale

$$f^k = f \circ \cdots \circ f \quad \text{(iterata } k \text{ volte)}.$$

**Proposizione** *Siano $f$ e $g$ due trasformazioni lineari. Allora anche la composta $f \circ g$ è lineare. Inoltre, se $A$ e $B$ sono, rispettivamente, le matrici canoniche di $f$ e $g$, allora la matrice canonica della composta $f \circ g$ è il prodotto $AB$. In particolare, la matrice di $f^k$ è $A^k$.*

La dimostrazione è immediata:

$$f \circ g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = f(B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = AB\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Esempio** Determiniamo la trasformazione composta $f \circ g$ se

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}, \quad g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}.$$

Le matrici canoniche sono, rispettivamente, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dunque la matrice di $f \circ g$ è:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

e si ha:

$$f \circ g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + y \end{pmatrix}.$$

Diremo che $f$ è *invertibile* se è iniettiva e suriettiva; in tal caso esiste una seconda trasformazione $g$ tale che $f \circ g = I$, dove $I$ è trasformazione identica: $I(P) = P$ per ogni punto $P$. Diremo allora che $g$ è l'*inversa* di $f$, e scriveremo:

$$g = f^{-1}.$$

Dunque, l'inversa di $f$ (se esiste) ha la seguente proprietà:

$$f \circ f^{-1} = I.$$

Notiamo che la trasformazione identica $I$ è lineare, con matrice canonica $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice identità).

Come conseguenza della proposizione precedente, si ha:

**Corollario** *Una trasformazione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è invertibile se e solo se la sua matrice canonica $A$ è invertibile, quindi se e solo se* $\det A \neq 0$. *In tal caso la matrice canonica dell'inversa di $f$ (cioè di $f^{-1}$) è $A^{-1}$.*

**Esempio** Sia $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + 3y \end{pmatrix}$, con matrice canonica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Poiché $\det A = 7 \neq 0$, $f$ è invertibile; inoltre

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

dunque

$$f^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3x - 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}.$$

**Esempio** Come abbiamo visto, la rotazione $f$ di angolo $\theta$ ha matrice canonica

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Siccome $M$ è ortogonale, si ha

$$M^{-1} = M^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Notiamo che $M^{-1}$ si ottiene da $M$ cambiando $\theta$ in $-\theta$. Dunque l'inversa di $f$ è la rotazione di angolo $-\theta$ (com'era, del resto, ovvio).

**Esempio** La traslazione di vettore $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$, definita da $f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+\alpha\\ y+\beta\end{pmatrix}$ non è lineare, ma è invertibile. Si vede subito che la sua inversa è la traslazione di vettore $\begin{pmatrix}-\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}$:

$$f^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-\alpha\\ y-\beta\end{pmatrix}.$$

## 1.6 Trasformazioni ortogonali

Sappiamo che $M$ è una matrice ortogonale se e solo se le colonne di $M$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$. Una matrice ortogonale trasforma basi ortonormali in basi ortonormali. Vogliamo ora classificare le matrici ortogonali di ordine 2.

**Proposizione** *Una matrice $2\times 2$ è ortogonale se e solo se è di uno dei due tipi seguenti:*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} & \text{con } \theta\in\mathbf{R},\\ \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} & \text{con } \alpha\in\mathbf{R}.\end{cases}$$

*Dimostrazione.* Le colonne di $M$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$. Supponiamo che la prima colonna sia $\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$. Allora $a^2+b^2=1$ e si dovrà avere

$$M = \begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}, \quad \text{oppure} \quad \begin{pmatrix}a & b\\ b & -a\end{pmatrix}.$$

Ponendo $a=\cos\theta, b=\sin\theta$ (risp. $a=\cos\alpha, b=\sin\alpha$) otteniamo l'asserto. $\square$

Notiamo che, nel primo caso, $M$ ha determinante 1 e rappresenta la rotazione di angolo $\theta$. Nel secondo caso, $M$ ha determinante $-1$ e rappresenta la seguente trasformazione: simmetria rispetto all'asse $x$ seguita dalla rotazione di angolo $\alpha$. Infatti

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Diremo che $f$ è una *trasformazione ortogonale* del piano se è lineare, ed è rappresentata da una matrice ortogonale. Risulta allora che ogni trasformazione ortogonale è di uno dei due tipi descritti nella proposizione precedente.

## 2 Cambiamento di coordinate

Sappiamo che, nel piano, un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$ è individuato da un'origine $O$ e da una base ortonormale $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ di $V_0^2$. Le coordinate di un punto $P$ sono date dalla coppia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, dove $\overrightarrow{OP} = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$. Scriveremo anche:

$$\mathcal{R} = (0; x, y).$$

Sia ora $\mathcal{R}'$ un secondo riferimento cartesiano, individuato da una nuova origine $O'$ e da una seconda base ortonormale $(\vec{e_1}', \vec{e_2}')$. Il passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ si ottiene componendo la trasformazione ortogonale che porta la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ nella base $(\vec{e_1}', \vec{e_2}')$ (descritta da una matrice ortogonale $M$) con la traslazione che porta $O$ in $O'$.

Sia $P$ un punto. Vogliamo ora esprimere la relazione fra $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le coordinate di $P$ rispetto a $\mathcal{R}$, e $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, le coordinate di $P$ rispetto a $\mathcal{R}'$. Supponiamo che $O'$ abbia coordinate $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{R}$, e sia $M$ la matrice di passaggio da $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ a $(\vec{e_1}', \vec{e_2}')$. Allora si dimostra che

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Poiché $M$ è ortogonale, si avrà $M^t = M^{-1}$ e dunque dalla formula precedente, moltiplicando a sinistra per $M$, si ottengono le formule inverse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Le formule (1) e (2) sono dette *formule del cambiamento di coordinate.* Esplicitamente, se $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ allora:

$$\begin{cases} x = m_{11}x' + m_{12}y' + x_0 \\ y = m_{21}x' + m_{22}y' + y_0 \end{cases} \tag{3}$$

Le formule si esprimono più semplicemente con la matrice $3 \times 3$:

$$T = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & x_0 \\ m_{21} & m_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risulta allora che le formule (3) si scrivono:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Esempio** Scrivere le formule del cambiamento di coordinate da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, se la nuova origine $O'$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto a $\mathcal{R}$ e gli assi $x', y'$ si ottengono ruotando gli assi $x, y$ di un angolo $\theta = \pi/4$.
In altre parole, il nuovo riferimento si ottiene componendo la rotazione di angolo $\pi/4$ seguita dalla traslazione definita dal vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. La matrice della rotazione è

$$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha poi $x_0 = 2, y_0 = 3$. Dunque

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-3 \end{pmatrix}.$$

Esplicitamente:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y-5) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x+y-1) \end{cases}$$

Notiamo che i nuovi assi coordinati hanno equazione, in $\mathcal{R}$:

$$\text{asse } x' : x - y + 1 = 0, \quad \text{asse } y' : x + y - 5 = 0.$$

Le trasformazioni inverse sono:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') + 2 \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') + 3 \end{cases} \tag{4}$$

descritte anche dalla matrice $3 \times 3$:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un opportuno cambiamento di coordinate semplifica lo studio delle curve. Consideriamo la curva $\mathcal{C}$ descritta, nelle coordinate $x, y$, dall'equazione

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 4 = 0.$$

Nel nuovo riferimento $(O'; x', y')$ dell'esempio precedente, la curva avrà un'equazione diversa: quale? Usando le trasformazioni inverse (4) si ottiene, dopo qualche calcolo, l'equazione:

$$x'^2 + y'^2 - 9 = 0,$$

evidentemente più semplice della precedente, e che rappresenta la circonferenza di centro $O'$ e raggio 3.

# 3 Forme quadratiche in due variabili

Una forma quadratica nelle variabili $x, y$ è una funzione $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ del tipo:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy. \tag{5}$$

con $a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbf{R}$. Dunque, $q$ è un *polinomio omogeneo* di *secondo grado* in $x, y$. Introduciamo la matrice simmetrica

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix},$$

detta *matrice della forma quadratica.* Notiamo che sulla diagonale principale ci sono i coefficienti dei termini $x^2$ e $y^2$, e sulla diagonale secondaria compare il coefficiente del termine misto $xy$ diviso 2.

L'utilità della matrice $Q$ sta nel fatto che la (5) si scrive, in forma matriciale, nel modo seguente:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y)Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{6}$$

**Esempio** La forma quadratica $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 - 7y^2 + 12xy$ ha matrice $Q = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$.

**Esempio** La forma quadratica $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x^2 + 5y^2 - 2xy$ ha matrice $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$.

**Esempio** La forma quadratica $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 - 3y^2$ ha matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Diremo che $q$ è *diagonale* se la sua matrice è diagonale. Questo avviene se e solo se il coefficiente del termine misto è nullo, in modo che $q$ si scrive:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda x^2 + \mu y^2,$$

con $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Negli esempi precedenti, solo la terza forma quadratica è in forma diagonale.

Nel prossimo teorema dimostriamo che, usando un'opportuna trasformazione ortogonale, ogni forma quadratica assume forma diagonale. Questo presenta diversi vantaggi, come vedremo studiando le coniche.

**Teorema** *Sia* $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *una forma quadratica, con matrice (simmetrica)* $Q$. *Siano* $\lambda, \mu$ *gli autovalori di* $Q$, *e sia* $M$ *una matrice ortogonale che diagonalizza* $Q$, *nel senso che:*

$$M^t Q M = D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

*Allora, se si pone* $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, *la forma* $q$ *si scrive:*

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda X^2 + \mu Y^2.$$

*Dimostrazione.* È una verifica immediata. Infatti, partiamo dall'espressione matriciale

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Se $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ si ha $Q = MDM^t$ e quindi:

$$\begin{aligned} q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x, y) Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x, y) MDM^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (X, Y) D \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= (X, Y) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \\ &= \lambda X^2 + \mu Y^2 \end{aligned}$$

$\square$

Diagonalizziamo le forme quadratiche degli esempi precedenti.

**Esempio** Sia $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 2x^2 - 7y^2 + 12xy$. La sua matrice è $Q = \begin{pmatrix}2 & 6\\6 & -7\end{pmatrix}$. Risulta che $Q$ ha autovalori $\lambda = 5, \mu = -10$. Dunque

$$q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 5X^2 - 10Y^2,$$

dove $X$ e $Y$ dipendono linearmente da $x, y$. Per vedere come, dobbiamo trovare una base ortonormale di autovettori e quindi una matrice $M$ che diagonalizza $Q$. Gli autospazi di $Q$ sono: $E(5) : x - 2y = 0, E(-10) : 2x + y = 0$, e possiamo prendere

$$M = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Esplicitamente

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y) \end{cases}$$

Quindi il risultato del calcolo è l'aver mostrato che

$$2x^2 - 7y^2 + 12xy = (2x + y)^2 - 2(x - 2y)^2.$$

Notiamo infine che $q$ si spezza in un prodotto di fattori lineari:

$$2x^2 - 7y^2 + 12xy = \Big((2 - \sqrt{2})x + (1 + 2\sqrt{2})y\Big)\Big((2 + \sqrt{2})x + (1 - 2\sqrt{2})y\Big).$$

**Esempio** Sia $q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 5x^2 + 5y^2 - 2xy$; quindi $Q = \begin{pmatrix}5 & -1\\-1 & 5\end{pmatrix}$.

Gli autovalori di $Q$ sono $\lambda = 6, \mu = 4$, quindi con un'opportuna trasformazione ortogonale si ha:

$$5x^2 + 5y^2 - 2xy = 6X^2 + 4Y^2.$$

Gli autospazi sono $E(6) : x + y = 0, E(4) : x - y = 0$, e possiamo prendere $M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{pmatrix}$, quindi $M^t = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$ da cui otteniamo le formule:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases}.$$

### 3.1 Carattere di una forma quadratica

Notiamo che, se $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è una forma quadratica, si ha sempre $q\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$. Ha interesse studiare il segno che $q$ assume sui vettori non nulli, in particolare, se $q$ cambia segno. Diremo che $q$ è:

- *definita positiva* se $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} > 0$ per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- *definita negativa* se $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} < 0$ per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- *semi-definita positiva* se $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$ per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;
- *semi-definita negativa* se $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq 0$ per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$;
- *indefinita* se $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ assume valori sia positivi che negativi (se cioè cambia di segno).

È chiaro che il carattere di $q$ si determina facilmente se ne conosciamo una forma diagonale.

**Esempio** Sia $q = 2x^2 - 7y^2 + 12xy$. Una forma diagonale è:

$$q = 5X^2 - 10Y^2,$$

quindi $q$ è indefinita: assume valori positivi se $Y = 0$ e valori negativi se $X = 0$. In generale, se i due autovalori di $Q$ hanno segno discorde: $\lambda\mu < 0$, la forma quadratica sarà indefinita.

**Esempio** Sia $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5x^2 + 5y^2 - 2xy$. Abbiamo visto che:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6X^2 + 4Y^2.$$

Dunque $q \geq 0$; inoltre $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ implica $X = Y = 0$, e di conseguenza $x = y = 0$ (poiché $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$). In conclusione, $q$ è definita positiva.

In generale, $q$ sarà definita positiva se e solo se i due autovalori di $Q$ sono entrambi positivi, e sarà semi-definita positiva se e solo se i suoi autovalori sono entrambi non-negativi; infine, sarà indefinita quando i due autovalori di $Q$ cambiano segno.

Si può stabilire il carattere di una forma quadratica solamente esaminando il determinante e la traccia della sua matrice $Q$. A tale scopo, premettiamo la seguente

**Proposizione** *Sia $Q$ una matrice $2 \times 2$ con autovalori $\lambda, \mu$. Allora:*

$$\mathrm{tr}Q = \lambda + \mu; \quad \det Q = \lambda\mu.$$

*Dimostrazione.* Sia $p_Q(x)$ il polinomio caratteristico di $Q$. Poiché $\lambda$ e $\mu$ sono autovalori, si avrà:

$$p_Q(x) = (x - \lambda)(x - \mu) = x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu.$$

D'altra parte sappiamo che il polinomio caratteristico di $Q$ si scrive:

$$p_Q(x) = x^2 - (\mathrm{tr}Q)x + \det Q.$$

Uguagliando i coefficienti otteniamo l'asserto. $\square$

**Teorema** *Sia $q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ una forma quadratica con matrice $Q$. Allora $q$ è:*

a) *definita positiva se e solo se* $\det Q > 0$ *e* $\mathrm{tr}Q > 0$*;*

b) *definita negativa se e solo se* $\det Q > 0$ *e* $\mathrm{tr}Q < 0$*;*

c) *indefinita se e solo se* $\det Q < 0$*;*

d) *semi-definita positiva se e solo se* $\det Q \geq 0$ *e* $\mathrm{tr}Q > 0$*;*

e) *semi-definita negativa se e solo se* $\det Q \geq 0$ *e* $\mathrm{tr}Q < 0$.

*Dimostrazione.* Diagonalizzando $q$ possiamo scrivere:

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda X^2 + \mu Y^2,$$

dove $\lambda$ e $\mu$ sono gli autovalori di $Q$.

a) $q$ è definita positiva se e solo se $\lambda$ e $\mu$ sono entrambi positivi; per la proposizione, ciò accade se e solo $\det Q = \lambda\mu > 0$ e $\mathrm{tr}Q = \lambda + \mu > 0$.

Negli altri casi, si procede in modo analogo. $\square$

# 4 Ellisse

Siano $a, c$ due numeri reali positivi, con $a > c$, e fissiamo nel piano due punti $F_1, F_2$ a distanza $2c$, che chiameremo *fuochi*.

**Definizione** *L'ellisse è il luogo dei punti del piano tali che la somma delle distanze di $P$ da $F_1$ e $F_2$ sia costante, uguale a $2a$.*

Dunque la condizione affinché $P$ appartenga all'ellisse è:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Vediamo ora di descrivere l'ellisse con un'equazione. Dobbiamo in primo luogo fissare un riferimento cartesiano opportuno. Fissiamo dunque l'origine $O$ nel punto medio del segmento $F_1F_2$, e l'asse $x$ come la retta per $F_1$ e $F_2$, orientata da $F_1$ a $F_2$. L'asse $y$ dovrà dunque essere la retta ortogonale all'asse $x$ passante per $O$. In tale riferimento, si avrà:

$$F_1 = (-c, 0),\ F_2 = (c, 0).$$

La condizione affinché $P = (x, y)$ appartenga all'ellisse è dunque:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

Con opportune manipolazioni algebriche si arriva all'equazione:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Ponendo $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (osserviamo che $a \geq b > 0$) arriviamo all'equazione:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

detta *equazione canonica* dell'ellisse.

**Osservazione** Se $a = b$ l'ellisse si riduce a una circonferenza. In tal caso $c = 0$ e i due fuochi coincidono con l'origine. Dunque, la circonferenza è un caso particolare di ellisse.

Vediamo alcune proprietà dell'ellisse $\mathcal{E}$. Le intersezioni con l'asse $x$ sono i punti

$$A = (a, 0),\ A' = (-a, 0).$$

Le intersezioni con l'asse $y$ sono date dai punti:

$$B = (0, b),\ B' = (0, -b).$$

I punti $A, B, A', B'$ sono detti *vertici* dell'ellisse. Il segmento $A'A$, di lunghezza $2a$, è detto *asse maggiore* mentre il segmento $B'B$, di lunghezza $2b$, è detto *asse minore*. Ora osserviamo che

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1,$$

da cui otteniamo

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b.$$

L'ellisse è dunque una curva limitata, contenuta nel rettangolo delimitato dalle rette

$$x = a, x = -a, y = b, y = -b$$

.

## 4.1 Simmetrie

Dall'equazione canonica vediamo che, se $P = (x, y)$ appartiene a $\mathcal{E}$ (dunque soddisfa l'equazione (7)), anche il suo simmetrico rispetto all'asse $x$ appartiene a $\mathcal{E}$: infatti, poiché la variabile $y$ viene elevata al quadrato, anche $P' = (x, -y)$ soddisfa la (7). Dunque $\mathcal{E}$ è simmetrica rispetto all'asse $x$. Per un motivo analogo si vede che $\mathcal{E}$ è simmetrica anche rispetto all'asse $y$, e dunque è simmetrica rispetto all'origine.

Basta dunque studiare il grafico di $\mathcal{E}$ nel primo quadrante, cioè quando $x$ e $y$ sono entrambi positivi. Possiamo allora descrivere $\mathcal{E}$ come grafico della funzione $y = f(x)$ ovvero

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

nell'intervallo in cui $0 < x < a$. Ora:

$$y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} < 0$$

e dunque, poiché $y' < 0$, si ha che $y$ decresce su $(0, a)$. D'altra parte

$$y'' = -\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}} < 0,$$

da cui si vede che la concavità della curva è sempre rivolta verso il basso. Dalle simmetrie di $\mathcal{E}$ si vede dunque che il grafico dell'ellisse è del tipo in figura:

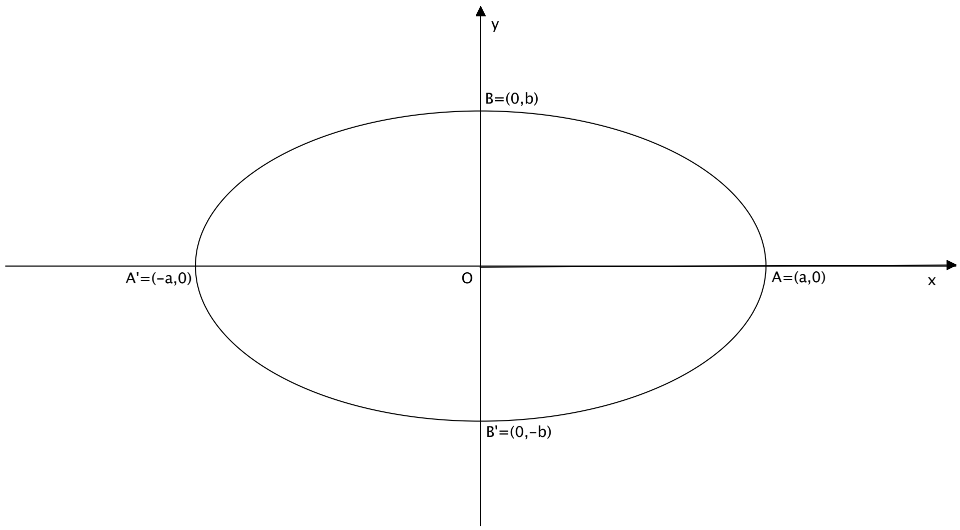


Figura 1: Grafico dell'ellisse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. I punti $A, A', B, B'$ sono i vertici.

Infine, l'area racchiusa dall'ellisse vale

$$\mathcal{A} = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Ora, usando una opportuna sostituzione, risulta

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^2}{4},$$

dunque l'area vale

$$\mathcal{A} = \pi ab.$$

## 4.2 Eccentricità

Il numero

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

è detto *eccentricità* dell'ellisse. Si ha evidentemente

$$0 \le e < 1.$$

Se $a = b$ l'eccentricità è nulla: in tal caso l'ellisse si riduce a una circonferenza di raggio $a$. Dunque l'eccentricità misura di quanto l'ellisse si discosti dall'essere una circonferenza: se $e$ è vicino a 1, allora si vede che $b$ dovrà essere molto piccolo rispetto ad $a$, e l'ellisse risulta molto "allungata".

# 5 Iperbole

Siano $a, c$ numeri positivi tali che $a < c$, e siano $F_1, F_2$ due punti fissati e tali che $d(F_1, F_2) = 2c$. L'iperbole $\mathcal{I}$ di fuochi $F_1, F_2$ è la curva del piano formata da tutti i punti $P$ tali che

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a.$$

Come nel caso dell'ellisse, fissiamo un riferimento cartesiano avente l'origine nel punto medio dei fuochi, e asse $x$ contenente i fuochi, orientato come il segmento $F_1F_2$. Allora $P = (x, y)$ appartiene a $\mathcal{I}$ se e solo se:

$$|\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a.$$

Con manipolazioni algebriche, ponendo

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} > 0$$

otterremo l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

detta *equazione canonica* dell'iperbole. Osserviamo che:

- l'iperbole è simmetrica rispetto agli assi, e quindi è simmetrica rispetto all'origine.
- $\mathcal{I}$ si svolge nelle parti del piano dove $x \geq a$ oppure $x \leq -a$.

In particolare, $\mathcal{I}$ non ha intersezione con l'asse $y$, mentre incontra l'asse $x$ nei due punti $A_1 = (-a, 0)$, $\quad A_2 = (a, 0)$. Per tracciare il grafico, è sufficiente studiare la curva nel primo quadrante, (precisamente, dove $x \geq a$ e $y \geq 0$), dove si ha

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Si vede subito che $\lim_{x\to+\infty} y = +\infty$, dunque la curva si allontana all'infinito quando $x \to \infty$. Calcolando le derivate prima e seconda di $y$, si vede che $y$ è sempre crescente e rivolge la concavità verso il basso. Si considerino le rette

$$\alpha_1 : \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \quad \alpha_2 : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

ottenute uguagliando a zero il primo membro dell'equazione canonica. Con metodi noti di analisi, si può verificare che $\alpha_1$ è un asintoto obliquo della porzione di iperbole che giace nel primo quadrante. Per simmetria, risulta allora che $\alpha_1$ e $\alpha_2$ sono asintoti obliqui dell'iperbole, il cui grafico risulta quindi del tipo:

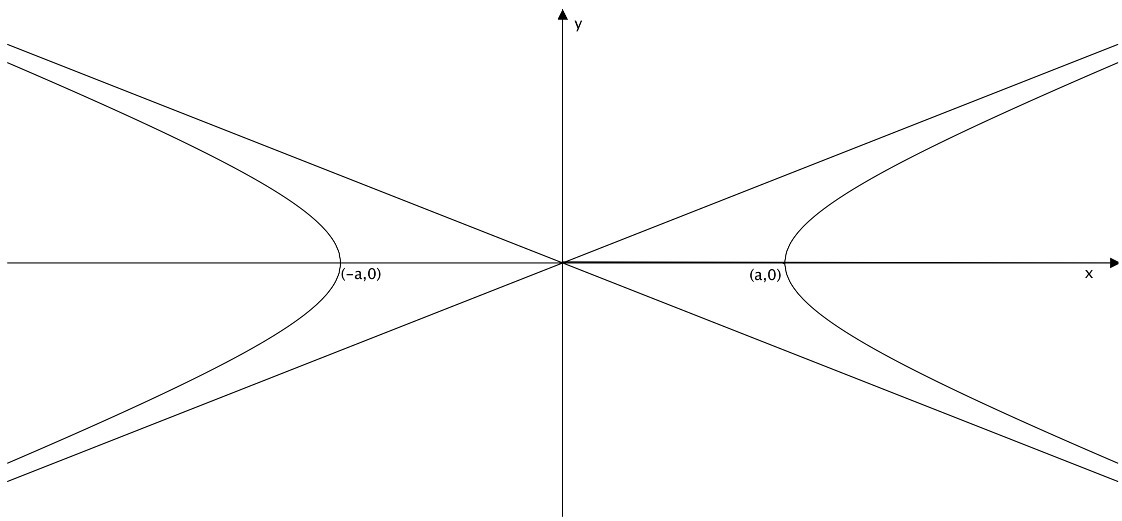


Figura 2: Grafico dell'iperbole $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Le rette sono gli asintoti.

## 6 Parabola

Fissiamo un punto del piano, $F$, e una retta non passante per $F$, diciamo $r$. La *parabola* $\mathcal{P}$ di fuoco $F$ e direttrice $r$ è il luogo dei punti $P$ tali che la distanza di $P$ da $r$ sia uguale alla distanza di $P$ da $F$:

$$d(P, r) = d(P, F).$$

Vediamo qual'è un'opportuna equazione che descrive $\mathcal{P}$. Fissiamo l'asse $x$ nella retta per $F$ ortogonale a $r$, orientata da $r$ a $F$, e l'origine $O$ nel punto medio del segmento $HF$, dove $H$ è la proiezione ortogonale di $F$ su $r$.

Detta $p$ la distanza di $F$ da $r$, risulta allora che le coordinate di $F$ sono $(p/2, 0)$ mentre la direttrice $r$ ha equazione

$$r : x = -\frac{p}{2}.$$

Si vede subito che, affinché $P = (x, y)$ appartenga alla parabola, deve risultare $x \geq 0$; poiché la distanza di $P = (x, y)$ da $r$ vale $|x + p/2|$ si ha la seguente condizione:

$$\sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = |x + \frac{p}{2}|.$$

Elevando al quadrato ambo i membri si ottiene

$$y^2 = 2px$$

detta *equazione canonica* della parabola $\mathcal{P}$.

Poiché la parabola si svolge tutta nel semipiano $x \geq 0$, essa non ha centro di simmetria. L'unica simmetria di $\mathcal{P}$ è infatti quella rispetto all'asse $x$. Possiamo pero' studiare la parabola nel semipiano $y \geq 0$, e per ribaltamento rispetto all'asse $x$ otterremo il suo grafico completo. Supponiamo quindi $y \geq 0$. Allora:

$$y = \sqrt{2px}.$$

Calcolando le derivate di $y$ rispetto a $x$ si vede che:

- la funzione $y$ è sempre crescente, e il suo grafico rivolge sempre la concavita' verso il basso. Inoltre, ogni retta $y = a$ taglia la parabola in un unico punto, e quindi $y$ tende all'infinito quando $x \to \infty$. Infine, $y$ non ha asintoti.

Il grafico della parabola è illustrato nella figura che segue.

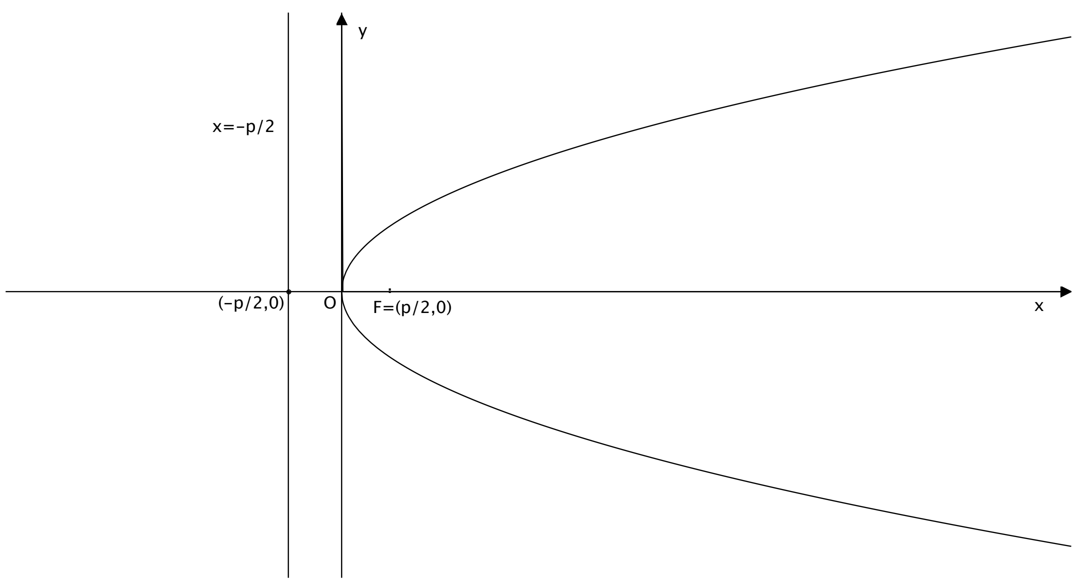


Figura 3: Grafico della parabola $y^2 = 2px$. La retta $x = -\frac{p}{2}$ è la direttrice, e il punto $F$ è il fuoco.