Parte 7. Autovettori e autovalori

A. Savo − Appunti del Corso di Geometria 2013-14

Indice delle sezioni

1 Endomorfismi

• Se V è uno spazio vettoriale, un *endomorfismo* di V è semplicemente un' applicazione lineare $f : V \to V$. Un endomorfismo di V è spesso chiamato *operatore* di V.

Possiamo ad esempio definire l'*endomorfismo identità,* denotato con $I : V \to V$, che associa a ogni vettore di V il vettore stesso:

$$I(v) = v.$$

• Fissata una base $\mathcal{B}$ di V diremo *matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$* la matrice associata all'applicazione lineare f prendendo la base $\mathcal{B}$ sia nello spazio di partenza che in quello di arrivo.

La matrice associata dipende dalla scelta della base; poiché uno spazio vettoriale non nullo ammette infinite basi diverse, uno stesso endomorfismo ammetterà (tranne rari casi) infinite matrici associate, tutte diverse tra loro. Studieremo il modo di trovare la base più conveniente, rispetto alla quale la matrice associata assuma una forma particolarmente semplice.

Esempio Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ definito da:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7x-13y+6z\\2x-8y+6z\\2x-13y+11z\end{pmatrix}.$$

La matrice associata a f rispetto alla base canonica è $A = \begin{pmatrix}7 & -13 & 6\\2 & -8 & 6\\2 & -13 & 11\end{pmatrix}$.

Cambiamo ora base, e consideriamo la base (v_1, v_2, v_3) di $\mathbf{R}^3$, dove

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}13\\2\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Risulta $f\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}13\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}65\\10\\0\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\0\\5\end{pmatrix}$. Dunque:

$$\begin{cases} f(v_1) = 0\\ f(v_2) = 5v_2\\ f(v_3) = 5v_3\end{cases}$$

e la matrice associata è $A' = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 5 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}$, diagonale. È chiaro che la matrice associata A' è molto più semplice; per studiare l'endomorfismo f la base (v_1, v_2, v_3) è più conveniente della base canonica. $\Box$

Esempio Sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ definito da

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x+y\end{pmatrix}.$$

Determinare le matrici A, A', A'' associate a f:

a) rispetto alla base canonica;

b) rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v_1', v_2')$ dove $v_1' = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $v_2' = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;

c) rispetto alla base $\mathcal{B}'' = (v_1'', v_2'')$ dove $v_1'' = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $v_2'' = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

Soluzione. a) A è semplicemente la matrice canonica di f: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si ha:

$$\begin{cases} f(v_1') = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1' + 0 \cdot v_2' \\ f(v_2') = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_1' + 2 \cdot v_2' \end{cases}$$

Dunque $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

c) Si ha:

$$\begin{cases} f(v_1'') = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \cdot v_1'' + 3 \cdot v_2'' \\ f(v_2'') = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = -5 \cdot v_1'' + 5 \cdot v_2'' \end{cases}$$

Dunque $A'' = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Le matrici associate sono quindi, rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \, A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \, A'' = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Per studiare la relazione tra le diverse matrici associate ad uno stesso endomorfismo dobbiamo prima capire la relazione che intercorre tra due basi di uno stesso spazio vettoriale.

2 Cambiamento di base

Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n), \mathcal{B}' = (v_1', \ldots, v_n')$ due basi di V. Ogni vettore della base $\mathcal{B}'$ si esprimerà dunque come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$:

$$\begin{cases} v_1' = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \cdots + a_{n1}v_n \\ v_2' = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{n2}v_n \\ \ldots \\ v_n' = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n \end{cases} \tag{1}$$

La matrice ottenuta incolonnando le coordinate:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

è detta *matrice del cambiamento di base* (o matrice di passaggio) da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. La $i-$esima colonna di M è dunque data dalle coordinate del vettore v'_i rispetto a $\mathcal{B}$, per ogni $i = 1, \dots, n$.
La matrice M è evidentemente $n \times n$.
Le relazioni in (1) si esprimono, in forma compatta:

$$(v'_1, \dots, v'_n) = (v_1, \dots, v_n)M \tag{2}$$

dove, a destra, si intende il prodotto del vettore riga $(v_1, \dots, v_n)$ (le cui entrate sono vettori) per la matrice M. Si scriverà anche

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}M.$$

Proposizione a) *La matrice di un cambiamento di base è invertibile.*

b) *Viceversa, sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V^n, e $M = \{a_{ij}\}$ una matrice invertibile. Allora i vettori $v'_1, \dots, v'_n$ definiti dalle relazioni in* (1) *formano una base di V^n.*

c) *Se $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sono due basi, la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ è l'inversa della matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.*

Dimostrazione. a) Il rango della matrice di passaggio M è uguale alla dimensione del sottospazio di V^n generato dai vettori $v'_1, \dots, v'_n$. Poiche' questi vettori per ipotesi formano una base di V^n, tale sottospazio è tutto V^n, quindi il rango vale n e la matrice è invertibile.

b) Per ipotesi, il rango della matrice M è n: dunque il sottospazio generato dai vettori $v'_1, \dots, v'_n$ ha dimensione n e coincide con V^n. Ciò significa che $v'_1, \dots, v'_n$ sono $n = \dim V^n$ vettori generatori e dunque formano una base.

c) Questo si dimostra moltiplicando ambo i membri della relazione (2), a destra, per l'inversa M^{-1}. $\square$

Esempio Fissiamo $V = \mathbf{R}^2$, e siano $\mathcal{B} = \mathcal{BC} = (e_1, e_2)$ la base canonica e $\mathcal{B}'$ la base (w_1, w_2) dove $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Poiche'

$$\begin{cases} w_1 = e_1 + 3e_2 \\ w_2 = 4e_1 + 5e_2 \end{cases} \tag{3}$$

la matrice di passaggio è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che le relazioni (3) si esprimono in forma matriciale:

$$(w_1, w_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

dove a destra si è moltiplicato il vettore riga (e_1, e_2) (le cui entrate sono vettori) per la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. $\square$

Dalla definizione segue facilmente che

Osservazione *Sia $V = \mathbf{R}^n$. La matrice di passaggio dalla base canonica $(e_1, \dots, e_n)$ alla base $(w_1, \dots, w_n)$ si ottiene semplicemente incolonnando i vettori $w_1, \dots, w_n$.*

Esempio Consideriamo la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ formata dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e la base $\mathcal{B}' = (w_1, w_2, w_3)$, dove

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Soluzione. Abbiamo le relazioni

$$\begin{cases} w_1 = v_1 - v_3 \\ w_2 = 2v_1 + v_2 \\ w_3 = v_1 + 2v_2 - v_3 \end{cases}$$

e quindi

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3 Matrici simili

Diremo che due matrici quadrate A, A' sono *simili* se esiste una matrice invertibile M tale che

$$A' = M^{-1}AM.$$

Risulta che matrici associate ad uno stesso endomorfismo (rispetto a basi diverse) sono simili.

Teorema *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V, e siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V. Se A è la matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}$, e A' è la matrice associata a f rispetto a $\mathcal{B}'$, allora A e A' sono simili. Precisamente,*

$$A' = M^{-1}AM,$$

dove M è la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Dimostrazione. È una verifica diretta, che omettiamo. $\square$

Esempio In uno degli esempi precedenti, abbiamo visto che l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^2$ definito da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}.$$

si rappresenta con la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica $\mathcal{BC}$, e con la matrice $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v_1', v_2')$ dove $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Per il teorema, le due matrici sono simili. In effetti si ha

$$A' = M^{-1}AM$$

dove $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice di passaggio da $\mathcal{BC}$ a $\mathcal{B}'$.

Osservazione Vale anche il viceversa del teorema precedente: date due matrici simili, diciamo A e A', allora esse rappresentano uno stesso endomorfismo. Ad esempio, se f è l'endomorfismo di $\mathbf{R}^n$ rappresentato da A rispetto alla base canonica, e se $\mathcal{B}'$ è la base di $\mathbf{R}^n$ tale che la matrice di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{B}'$ è M, allora A' rappresenta f nella base $\mathcal{B}'$.

4 Endomorfismi diagonalizzabili

- Un endomorfismo di uno spazio vettoriale V si dice *diagonalizzabile* se puo' essere rappresentato da una matrice diagonale; in altre parole, se esiste una base di V rispetto alla quale la matrice associata è diagonale.

Esempio Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x - 12y + 3z \\ 4x - 7y + 3z \\ 4x - 12y + 8z \end{pmatrix}.$$

La matrice associata rispetto alla base canonica è $A = \begin{pmatrix} 9 & -12 & 3 \\ 4 & -7 & 3 \\ 4 & -12 & 8 \end{pmatrix}$: non è diagonale.
Pero' possiamo trovare una base piu' fortunata. Siano infatti

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

che formano una base di $\mathbf{R}^3$. Un calcolo mostra che:

$$\begin{cases} f(v_1) = 0 \\ f(v_2) = 5v_2 \\ f(v_3) = 5v_3 \end{cases}.$$

Dunque la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ è $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, diagonale. Per definizione, l'endomorfismo f è diagonalizzabile.
Notiamo che i vettori della base "buona" hanno tutti la seguente proprietà: il trasformato del vettore è un multiplo del vettore stesso. Tale proprietà caratterizza quelli che saranno chiamati *autovettori* di f.
Studieremo il seguente problema:

- dato un endomorfismo, stabilire se esso è diagonalizzabile, e trovare eventualmente una base rispetto alla quale la matrice associata è diagonalizzabile.

5 Autovettori e autovalori

5.1 Definizione

Definizione *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V.*

a) *Un vettore* $v \neq O$ *si dice* autovettore *di* f *associato all'autovalore* $\lambda \in \mathbf{R}$ *se*

$$f(v) = \lambda v.$$

b) *Uno scalare* λ *si dice* autovalore *di* f *se esiste un vettore* $v \neq O$ *tale che* $f(v) = \lambda v$.

Esempio Sia f l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^2$ definito da $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$, e siano $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Un calcolo mostra che

$$\begin{cases} f(v_1) = O = 0v_1 \\ f(v_2) = 2v_2 \end{cases}$$

Allora, per definizione, v_1 è un autovettore di f associato all'autovalore $\lambda = 0$, e v_2 è un autovettore associato all'autovalore $\lambda = 2$.

Notiamo che i due autovettori formano una base (v_1, v_2) di $\mathbf{R}^2$, e che la matrice associata a tale base è diagonale: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, con elementi diagonali dati esattamente dagli autovalori.

Ricordiamo che, per definizione, un autovettore di un endomorfismo è, per definizione, *non nullo.* Al contrario, lo scalare 0 può essere un autovalore di f. In effetti, osserviamo che

- 0 è un autovalore di f se solo se $\mathrm{Ker} f \neq \{O\}$. Ogni vettore del nucleo, diverso dal vettore nullo, è un autovettore con autovalore 0.

5.2 Caratterizzazione degli endomorfismi diagonalizzabili

Supponiamo ora che ci sia una base di V, diciamo $(v_1, \ldots, v_n)$, formata da autovettori di f. Allora esistono autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (non necessariamente tutti distinti) tali che

$$\begin{cases} f(v_1) = \lambda_1 v_1 \\ f(v_2) = \lambda_2 v_2 \\ \ldots \\ f(v_n) = \lambda_n v_n. \end{cases}$$

Per definizione, la matrice associata a f rispetto a tale base di autovettori è diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

con elementi diagonali dati dagli autovalori. Viceversa, se la matrice associata a f rispetto a una data base $(v_1, \dots, v_n)$ è diagonale, allora i vettori di tale base sono autovettori di f associati, rispettivamente, agli elementi diagonali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. In conclusione, abbiamo dimostrato il seguente risultato.

Teorema *Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale V è diagonalizzabile se e solo se V ammette una base formata da autovettori di f.*

Osserviamo i seguenti esempi banali di endomorfismi diagonalizzabili.

Esempio L'endomorfismo nullo $O : V \to V$ ha matrice associata nulla rispetto a una qualunque base, dunque è banalmente diagonalizzabile. Gli autovalori sono tutti uguali a zero.

Esempio L'endomorfismo identità $I : V \to V$ è diagonalizzabile, poiché ha matrice associata data, appunto, dalla matrice identità (rispetto a una qualunque base). Gli autovalori sono tutti uguali a 1.

Osserviamo ora che *non tutti* gli endomorfismi sono diagonalizzabili; anzi, ci sono endomorfismi che non ammettono autovettori (e quindi non ammettono autovalori).

Esempio Consideriamo l'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ definito da

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix},$$

con matrice canonica $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Supponiamo per assurdo che $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sia un autovettore di f con autovalore λ:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

con $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allora si avrebbe

$$\begin{cases} \lambda x = y \\ \lambda y = -x \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per x, la seconda per y e sommiamo. Otteniamo la relazione

$$\lambda(x^2 + y^2) = 0,$$

da cui $\lambda = 0$ oppure $x^2 + y^2 = 0$. Ora, nessuno dei casi si può verificare, perché altrimenti $x = y = 0$. Dunque f non ha né autovettori, né autovalori. $\square$

5.3 Autospazio associato a un autovalore

È facile verificare che, se λ è un autovalore, il sottoinsieme di V

$$E(\lambda) = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$$

è un sottospazio di V, detto *autospazio associato a λ.* La sua dimensione è detta anche *molteplicità geometrica* di λ, e si denota con $MG(\lambda)$. Quindi:

$$MG(\lambda) = \dim E(\lambda).$$

Notiamo che $E(\lambda)$ è formato dal vettore nullo, e da tutti gli autovettori associati a λ. Se λ è un autovalore, allora per definizione esiste almeno un vettore non nullo nel sottospazio $E(\lambda)$. Dunque, se λ è un autovalore si ha sempre

$$MG(\lambda) \geq 1.$$

Per definizione, si ha inoltre:

$$E(0) = \mathrm{Ker} f.$$

Esempio L'endomorfismo $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^2$ ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 2$. L'autospazio $E(0)$ associato a 0 è il nucleo di f, di equazione $x + y = 0$, dunque

$$\dim E(0) = 1 \quad \text{con base } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'autospazio $E(2)$ associato all'autovalore 2 è definito dall'equazione

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

Con semplici calcoli, si vede che $E(2)$ è descritto dall'equazione $x - y = 0$. Dunque

$$\dim E(2) = 1 \quad \text{con base } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entrambi gli autovalori hanno molteplicità geometrica 1. $\square$

Consideriamo ora il seguente problema:

- dato l'endomorfismo f, determinare tutti gli autovalori e gli autospazi di f.

Vedremo che, se f è un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n, allora gli autovalori sono le radici di un certo polinomio di grado n, detto *polinomio caratteristico di f.*

6 Il polinomio caratteristico

In ciò che segue, $V = V^n$ è uno spazio vettoriale di dimensione n.

Proposizione *Sia f un endomorfismo di V^n e sia A una qualunque matrice associata a f. Allora $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore di f se e solo se*

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

dove I è la matrice identità.

Dimostrazione. Supponiamo che λ sia un autovalore di f: allora esiste un vettore $v \neq 0$ tale che $f(v) = \lambda v$. Fissiamo una qualunque base $\mathcal{B}$ di V e consideriamo la matrice A, associata a f rispetto a $\mathcal{B}$. Sia $X \in \mathbf{R}^n$ il vettore colonna delle coordinate di v (notiamo che $X \neq O$ per ipotesi). Allora sappiamo che AX è il vettore colonna delle coordinate di $f(v)$. Dunque

$$AX = \lambda X.$$

Poiché $X = IX$ l'equazione si scrive:

$$(A - \lambda I)X = O. \tag{4}$$

Tale equazione equivale a un sistema lineare omogeneo di n equazioni in n incognite, con matrice dei coefficienti data da $A - \lambda I$. Per ipotesi, $X \neq 0$ è un autosoluzione del sistema: dunque $\mathrm{rk}(A - \lambda I) < n$, cioè $\det(A - \lambda I) = 0$.

Viceversa, se $\lambda \in \mathbf{R}$ è tale che $\det(A - \lambda I) = 0$ possiamo invertire il ragionamento e trovare un'autosoluzione X del sistema (4): a X corrisponde un vettore non nullo $v \in V$ tale che $f(v) = \lambda v$ e quindi λ risulta un autovalore di f. $\square$

Consideriamo la funzione di x:

$$p_A(x) = \det(A - xI).$$

Si verifica facilmente che $p_A(x)$ è un polinomio di grado n nella variabile x, detto il *polinomio caratteristico* di A.

Abbiamo il seguente risultato.

Teorema *Sia f un endomorfismo di V^n, e sia A una matrice associata a f. Allora:*

a) *Gli autovalori di f sono le radici del polinomio caratteristico di A.*

b) *Se λ è un autovalore di f allora:*

$$MG(\lambda) = \dim E(\lambda) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda I).$$

Dimostrazione. La prima parte è già dimostrata. La seconda segue immediatamente dal

fatto che la la dimensione dell'autospazio $E(\lambda)$ associato a λ uguaglia la dimensione del sottospazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $(A-\lambda I)X=O$. Dal teorema di Rouché-Capelli, tale dimensione vale $n-\mathrm{rk}(A-\lambda I)$. $\square$

È noto che un polinomio di grado n ammette al massimo n radici distinte. Poiché il polinomio caratteristico di una matrice $n\times n$ ha grado n, osserviamo che

- Un endomorfismo di uno spazio vettoriale V^n ammette al massimo n autovalori distinti.

Esempio Trovare gli autovalori dell'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$: $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+6y\\-2x+5y\end{pmatrix}$.

Soluzione. Fissando la base canonica possiamo prendere come matrice associata la matrice canonica di f, cioè $A=\begin{pmatrix}-2&6\\-2&5\end{pmatrix}$. Si ha:

$$A-xI=\begin{pmatrix}-2&6\\-2&5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-x&6\\-2&5-x\end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}p_A(x)&=\begin{vmatrix}-2-x&6\\-2&5-x\end{vmatrix}\\&=x^2-3x+2\end{aligned}$$

Gli autovalori si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica $x^2-3x+2=0$. Troviamo le due soluzioni:

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=2.$$

che saranno quindi gli autovalori di f. $\square$

Esempio Abbiamo già osservato che l'endomorfismo $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^2$ non ammette autovalori. In effetti, la sua matrice canonica $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ ha polinomio caratteristico

$$p_A(x)=\begin{vmatrix}-x&1\\-1&-x\end{vmatrix}=x^2+1,$$

che non ammette radici (reali). $\square$

Esercizio Dimostrare che il polinomio caratteristico di una matrice 2×2 si scrive

$$p_A(x) = x^2 - \mathrm{tr}A \cdot x + \det A.$$

dove $\mathrm{tr}A$ è la traccia di A (definita come la somma degli elementi diagonali di A).
Ad esempio, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ allora $\mathrm{tr}A = 5$ e $\det A = -2$: dunque

$$p_A(x) = x^2 - 5x - 2.$$

Esempio Il polinomio caratteristico della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ è:

$$p_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 1 \\ 0 & 0 & -3-x \end{vmatrix} = -(x-1)^2 \cdot (x+3)$$

e gli autovalori distinti sono: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$. $\square$

Notiamo che la matrice dell'esempio precedente è triangolare superiore. In generale, se A è triangolare superiore (rispettivamente, inferiore) anche $A - xI$ è triangolare superiore (rispettivamente, inferiore). Si ottiene facilmente che

- gli autovalori (distinti) di una matrice triangolare (superiore o inferiore) sono gli elementi diagonali (distinti) della matrice.

6.1 Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico

Abbiamo visto che gli autovalori di un endomorfismo f sono le radici del polinomio caratteristico di una matrice associata a f. Sappiamo che le matrici associate ad un endomorfismo sono, in genere, diverse, poiché dipendono dalla scelta di una base. In questa sezione verificheremo che tutte le matrici associate ad uno stesso endomorfismo hanno lo *stesso* polinomio caratteristico. Iniziamo con un esempio.

Esempio Le matrici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ sono tutte associate all'operatore di $\mathbf{R}^2$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$$

rispetto alle basi: $\mathcal{BC}$ (base canonica), $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Un calcolo mostra che, in effetti, tutte e tre le matrici hanno polinomio caratteristico $x^2 - 2x$.

Il risultato generale è conseguenza della seguente proposizione.

Proposizione *Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che, se A e A' sono due matrici simili, allora $p_A(x) = p_{A'}(x)$. Sia C una matrice invertibile tale $A' = C^{-1}AC$. Allora:

$$\begin{aligned}
p_{A'}(x) &= \det(A' - xI) \\
&= \det(C^{-1}AC - xI) \\
&= \det\big(C^{-1}AC - C^{-1}(xI)C\big) \\
&= \det\big(C^{-1}(A - xI)C\big) \\
&= \det(C^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det C \\
&= \frac{1}{\det C} \cdot \det(A - xI) \cdot \det C \\
&= \det(A - xI) \\
&= p_A(x).
\end{aligned}$$

□

Corollario *Tutte le matrici associate ad uno stesso endomorfismo hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Supponiamo che A e A' siano due matrici associate allo stesso endomorfismo f. Allora sappiamo che A e A' sono simili, e dunque, per la proposizione precedente, esse hanno lo stesso polinomio caratteristico. □

Grazie alla precedente proposizione, possiamo definire il polinomio caratteristico di un endomorfismo f di V^n come il polinomio caratteristico di una *qualunque* matrice associata a f (tale polinomio è sempre lo stesso). Scriveremo dunque

$$p_f(x) = p_A(x),$$

dove A è una matrice associata a f.

Esempio Sia $D : \mathbf{R}^3[x] \to \mathbf{R}^3[x]$ l'endomorfismo "derivazione":

$$D(p(x)) = p'(x).$$

La matrice associata a D rispetto alla base canonica $(1, x, x^2)$ di $\mathbf{R}^3[x]$ è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dunque

$$p_f(x) = p_A(x) = -x^3,$$

e l'unico autovalore di D è $\lambda = 0$.

7 Calcolo degli autospazi

Una volta calcolati gli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ di un endomorfismo f (tramite il polinomio caratteristico di una sua matrice associata A) sarà possibile determinare gli autospazi semplicemente risolvendo l'equazione vettoriale

$$f(v) = \lambda_j v$$

(nell'incognita v) per ognuno degli autovalori trovati. Notiamo che le coordinate X di un qualunque vettore dell'autospazio $E(\lambda_j)$ sono le soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A - \lambda_j I)X = O.$$

In questo modo è possibile stabilire se l'endomorfismo è diagonalizzabile oppure no.
Iniziamo discutendo due esempi; daremo in seguito dei criteri generali.

Esempio Determinare gli autospazi dell'endomorfismo di $\mathbf{R}^2$ definito da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 6y \\ -2x + 5y \end{pmatrix}$$

e stabilire se f è diagonalizzabile.

Soluzione. La matrice di f nella base canonica è $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Quindi:

$$p_A(x) = x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$

Gli autovalori distinti di f sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Per trovare l'autospazio associato all'autovalore 1 dobbiamo risolvere l'equazione vettoriale $f(v) = v$; passando alle coordinate, l'equazione è equivalente al sistema

$$(A - I)X = O.$$

Poiché $A - I = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ il sistema si scrive

$$\begin{cases} -3x + 6y = 0 \\ -2x + 4y = 0. \end{cases}$$

Quindi

$$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}, \quad \text{con base} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per l'autovalore 2 si ha $A - 2I = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ e il sistema è

$$\begin{cases} -4x + 6y = 0 \\ -2x + 3y = 0. \end{cases}$$

Quindi

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 3s \\ 2s \end{pmatrix}, s \in \mathbf{R} \right\}, \quad \text{con base} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che i due autospazi hanno entrambi dimensione 1 e quindi gli autovalori hanno entrambi molteplicità geometrica 1:

$$MG(1) = MG(2) = 1.$$

Collezionando le basi di ciascuno dei due autospazi (prendendo cioè $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$) otteniamo la coppia di vettori linearmente indipendenti

$$(v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$$

che è dunque una base di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di f. L'endomorfismo f è diagonalizzabile, e la matrice associata a f rispetto a tale base è $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\square$

È importante osservare che f ha due autovalori distinti $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, entrambi di molteplicità geometrica 1. Quindi la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è 2, pari alla dimensione dello spazio su cui opera f:

$$MG(1) + MG(2) = 2 = \dim \mathbf{R}^2.$$

Esempio Determinare gli autovalori e gli autospazi dell'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Stabilire se f è diagonalizzabile.

Soluzione. f si scrive esplicitamente:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y + 5z \\ -y + 3z \\ 2z \end{pmatrix}.$$

Poiché A è triangolare superiore, gli autovalori saranno gli elementi diagonali. f ha dunque due autovalori distinti $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ e, di conseguenza, due autospazi: $E(-1), E(2)$. Cerchiamo una base di ciascuno di essi. Per $E(-1)$ dobbiamo risolvere l'equazione $f(v) = -v$, dunque il sistema

$$(A + I)X = O.$$

Esplicitamente $A + I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ dunque il sistema è:

$$\begin{cases} y + 5z = 0 \\ 3z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

e il suo insieme delle soluzioni ha dimensione 1 con base $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In conclusione

$$\dim E(-1) = 1, \quad \text{con base } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Per verificare il risultato ricordiamo che, in generale, la dimensione dell'autospazio $E(\lambda)$ di un endomorfismo $f : V^n \to V^n$ è data da

$$MG(\lambda) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda I).$$

In questo caso $\lambda = -1$ e $\mathrm{rk}(A + I) = 2$, dunque $MG(-1) = 3 - 2 = 1$.

Veniamo ora al secondo autospazio, $E(2)$. La sua dimensione è $MG(2) = 3 - \mathrm{rk}(A - 2I)$. Poiché la matrice

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha rango due, otteniamo $MG(2) = 1$. Una base di $E(2)$ si ottiene risolvendo il sistema $(A - 2I)X = 0$:

$$\begin{cases} -3x + y + 5z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases}$$

che ammette ∞^1 soluzioni $\begin{pmatrix} 2t \\ t \\ t \end{pmatrix}$, con $t \in \mathbf{R}$. Ne segue che:

$$\dim E(2) = 1, \quad \text{con base } \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Uniamo ora le basi dei due autospazi: otteniamo i due autovettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

che sono linearmente indipendenti ma che *non possono* formare una base di $\mathbf{R}^3$, poiché $\mathbf{R}^3$ ha dimensione 3. In conclusione, f non è diagonalizzabile. In effetti, per avere una base di autovettori almeno uno dei due autospazi avrebbe dovuto avere dimensione maggiore o uguale a 2. La non diagonalizzabilità di f è dunque conseguenza del fatto che la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è *minore* della dimensione dell'intero spazio:

$$MG(-1) + MG(2) = 2 < 3 = \dim \mathbf{R}^3.$$

□

Nella prossima sezione mostreremo che un endomorfismo di un qualunque spazio vettoriale V^n è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche di tutti i suoi autovalori vale precisamente n.

8 Primo criterio

Osserviamo che, dati due autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$ di un endomorfismo f, si ha sempre

$$E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{O\}.$$

Infatti, se $v \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$, allora $f(v) = \lambda_1 v$ e $f(v) = \lambda_2 v$ da cui, uguagliando, otteniamo

$$(\lambda_1 - \lambda_2)v = O.$$

Per ipotesi, $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ dunque necessariamente $v = O$.

Proposizione *Sia f un endomorfismo di uno spazio vettoriale V^n, con autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ (si suppone $h \geq 1$).*

a) *Sia* $\mathcal{B}_i$ *una base dell'autospazio* $E(\lambda_i)$*, dove* $i = 1, \dots, h$*. Allora i vettori dell'insieme*

$$\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_h$$

sono linearmente indipendenti.
b) *La somma di tutte le molteplicità geometriche è minore o uguale a* n*:*

$$\sum_{i=1}^{h} MG(\lambda_i) \leq n.$$

Dimostrazione. a) Per dare un'idea della dimostrazione esamineremo solo il caso in cui ci siano due autovalori distinti $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Il caso generale si dimostra per induzione. Fissate le basi $\mathcal{B}_1 = (u_1, \dots, u_k)$ di $E(\lambda_1)$ e $\mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_l)$ di $E(\lambda_2)$, supponiamo che

$$a_1u_1 + \cdots + a_ku_k + b_1v_1 + \cdots + b_lv_l = O.$$

Ponendo $u = a_1u_1 + \cdots + a_ku_k$ e $v = b_1v_1 + \cdots + b_lv_l$ otteniamo

$$u + v = O.$$

Ora per ipotesi $u \in E(\lambda_1)$ e $v \in E(\lambda_2)$; poiché $u = -v$ vediamo che

$$u \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2)$$

dunque $u = O$ e

$$a_1u_1 + \cdots + a_ku_k = O.$$

Poiché i vettori $u_1, \dots, u_k$ sono linearmente indipendenti per ipotesi otteniamo infine $a_1 = \cdots = a_k = 0$. Analogamente $v = O$ implica $b_1 = \cdots = b_l = 0$. La conclusione è che i vettori dell'unione

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_l\}$$

sono linearmente indipendenti.
b) Siccome $\mathcal{B}_i$ è una base di $E(\lambda_i)$, il numero dei vettori di $\mathcal{B}_i$ è $\dim E(\lambda_i) = MG(\lambda_i)$, per ogni $i = 1, \dots, h$. Dunque i vettori dell'insieme $\mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_h$ sono, in numero, pari alla somma di tutte le molteplicità geometriche; poiché sono linearmente indipendenti per la parte a), tale somma non può superare la dimensione n. $\square$

La proposizione afferma che, unendo le basi di tutti gli autospazi, otteniamo sempre vettori linearmente indipendenti: se gli autovettori cosi' ottenuti sono in numero sufficiente (cioè n) allora essi formeranno una base dell'intero spazio e l'endomorfismo risulterà diagonalizzabile. Enunciamo dunque il criterio seguente, che chiameremo *primo criterio di diagonalizzabilità.*

Teorema *Un endomorfismo di uno spazio vettoriale V^n è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n. In altre parole, se e solo se*

$$\sum_{i=1}^{k} MG(\lambda_i) = n,$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori distinti di f.

Dimostrazione. Supponiamo che $\sum_{i=1}^{k} MG(\lambda_i) = n$. I vettori di $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ sono in tutto $n = \dim V^n$ e sono linearmente indipendenti grazie alla proposizione precedente; dunque tali vettori formano una base di autovettori e l'endomorfismo è diagonalizzabile. Viceversa, se la somma delle molteplicità geometriche è diversa da n allora deve essere minore di n per la parte b) della proposizione. È evidente che in tal caso non esiste una base di autovettori. $\square$

Corollario *Sia f un operatore di V^n, e supponiamo che f ammetta n autovalori distinti. Allora f è diagonalizzabile.*

Dimostrazione. Poiché la molteplicità geometrica di un autovalore vale almeno uno, e gli autovalori distinti sono n, la somma di tutte le molteplicità geometriche è almeno n; per la parte b) della proposizione tale somma deve essere uguale a n e quindi f risulta diagonalizzabile. In particolare, l'esistenza di n autovalori distinti implica che tutti gli autospazi hanno dimensione 1. $\square$

- Il corollario dà una condizione *sufficiente,* ma non necessaria, per la diagonalizzabilità.

Per stabilire se un dato endomorfismo di V^n sia diagonalizzabile oppure no, possiamo procedere come segue.

1. Fissiamo una base e consideriamo una matrice associata A.

2. Troviamo gli autovalori distinti di f, diciamo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, risolvendo l'equazione caratteristica $p_A(x) = 0$.

3. Calcoliamo la molteplicità geometrica di ciascun autovalore, con la formula

$$MG(\lambda_i) = n - \mathrm{rk}(A - \lambda_i I).$$

4. Se la somma di tutte le molteplicità geometriche è minore di n, l'endomorfismo f non è diagonalizzabile, e abbiamo finito.

5. Se tale somma vale n, allora f è diagonalizzabile. Per trovare una base di autovettori, troviamo una base $\mathcal{B}_i$ di ciascun autospazio risolvendo il sistema $(A - \lambda_i I)X = O$. Uniamo

tutte le basi cosi' trovate: l'insieme di autovettori $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ sarà la base di V^n cercata.

Ecco degli esempi.

8.1 Esempio

Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x + 2y - 2z \\ -x - y + z \end{pmatrix}$$

Scegliendo la base canonica, possiamo considerare la matrice associata $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ con polinomio caratteristico $p_A(x) = -x^3 + 4x^2$ che si fattorizza come

$$p_A(x) = -x^2(x - 4).$$

Abbiamo due autovalori distinti: $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$. Un calcolo mostra che $\mathrm{rk}A = 1$ dunque

$$MG(0) = 2,$$

mentre $\mathrm{rk}(A - 4I) = 1$ dunque

$$MG(4) = 1.$$

La somma delle molteplicità geometriche è 3, pari alla dimensione, e f risulta diagonalizzabile. Una base di $E(0)$ (che, per inciso, è il nucleo di f) è data dai vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base di $E(4)$ è data dal vettore

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Unendo le basi degli autospazi, otteniamo i tre vettori

$$(v_1, v_2, w_1)$$

che, grazie alla proposizione, sono linearmente indipendenti (non c'è bisogno di ulteriori verifiche) e formano la base di autovettori cercata.

Notiamo che la matrice associata a f rispetto alla base $\mathcal{B} = (v_1, v_2, w_1)$ è diagonale, con elementi diagonali dati dagli autovalori associati, rispettivamente, a v_1, v_2, w_1:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ed è simile alla matrice A, nel senso che $D = C^{-1}AC$. La matrice C è la matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$, e dunque le colonne di C sono date dalla base di autovettori $\mathcal{B}$:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

8.2 Esempio

Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ rappresentato da $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A(x) = (2 - x)(x^2 + 6)$$

che ammette l'unico autovalore $\lambda_1 = 2$ (infatti, il fattore $x^2 + 6$ è irriducibile). Si vede che $A - 2I$ ha rango 2, dunque $MG(2) = 1$. La somma delle molteplicità geometriche è 1, minore di 3, e f non è diagonalizzabile. □

8.3 Esempio

Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ rappresentato da $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Poiché A è triangolare superiore, gli autovalori di f saranno gli elementi diagonali di A. Quindi f ammette tre autovalori distinti

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -1.$$

Poiché la dimensione è 3, il corollario assicura che f è diagonalizzabile.

8.4 Esempio

Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^3$ rappresentato da $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica. Per quali valori di a, b l'endomorfismo risulta diagonalizzabile?

Soluzione. Abbiamo l'unico autovalore 1 con $MG(1) = 3 - \text{rk}(A - I)$ e quindi f è diagonalizzabile se e solo se $\text{rk}(A - I) = 0$, cioè se e solo se $A - I = 0$, che corrisponde a $a = b = 0$. $\square$

9 Secondo criterio

In questa sezione daremo un altro criterio necessario e sufficiente per la diagonalizzabilità.

9.1 Radici di un polinomio e molteplicità

Sia $p(x)$ un polinomio di grado n a coefficienti reali. Il numero $\lambda \in \mathbf{R}$ è una *radice* di $p(x)$ se

$$p(\lambda) = 0.$$

Non tutti i polinomi ammettono radici.

Esempio Il polinomio $p(x) = x^2 + 1$ non ammette radici. Piú in generale, il polinomio di secondo grado $p(x) = ax^2 + bx + c$ ammette radici se e solo se il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ è maggiore o uguale a zero. In tal caso le radici si ottengono dalla formula

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Quindi avremo due radici distinte se $\Delta > 0$, una sola radice se $\Delta = 0$ e nessuna radice se $\Delta < 0$.

È ben noto che λ è una radice di $p(x)$ se e solo se $p(x)$ è divisibile per $x - \lambda$, e si avrà

$$p(x) = (x - \lambda)q(x),$$

dove $q(x)$ è un polinomio di grado $n - 1$. Se $q(\lambda) \neq 0$, diremo che λ è una radice di molteplicità 1. Se $q(\lambda) = 0$ allora possiamo dividere $q(x)$ per $x - \lambda$ e avremo

$$p(x) = (x - \lambda)^2 r(x)$$

con $r(x)$ polinomio di grado $n-2$. Continuando in questo modo, arriveremo dopo $k \leq n$ passi alla decomposizione

$$p(x) = (x-\lambda)^k r(x),$$

con $r(x)$ polinomio tale che $r(\lambda) \neq 0$. Diremo allora che λ è una radice con *molteplicità* k. Dunque

- λ è una radice di molteplicità k se $p(x)$ è divisibile per $(x-\lambda)^k$ ma non per $(x-\lambda)^{k+1}$.

Il polinomio $p(x)$ si dice *totalmente riducibile* se si spezza nel prodotto di polinomi di primo grado del tipo $x-\lambda_j$, eventualmente moltiplicato per una costante $c \neq 0$. Se $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono le radici *distinte,* allora $p(x)$ è totalmente riducibile se si scrive

$$p(x) = c(x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_2)^{m_2} \cdots (x-\lambda_k)^{m_k},$$

con $m_1 + \cdots + m_k = n$. È chiaro dalla definizione che, per ogni j, l'esponente m_j è la molteplicità della radice λ_j.

Esempio Consideriamo il polinomio $p(x) = 2x^5 - 2x^4 - 4x^3$. Allora:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^3(x^2 - x - 2) \\ &= 2x^3(x-2)(x+1). \end{aligned}$$

Dunque $p(x)$ è totalmente riducibile, con radici $0, 2, -1$: la prima ha molteplicità 3, e le altre hanno molteplicità 1. La somma delle molteplicità è 5, pari al grado di $p(x)$.

Esempio Il polinomio $p(x) = x^4 - x^2 - 6$ non è totalmente riducibile. Infatti

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2-3)(x^2+2) \\ &= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})(x^2+2). \end{aligned}$$

Il fattore x^2+2 non ammette radici, e non può essere ulteriormente decomposto. $p(x)$ ammette le radici $\sqrt{3}, -\sqrt{3}$, entrambe di molteplicità 1. Dunque la somma delle molteplicità delle radici è 2, minore di 4 (il grado di $p(x)$).

Osserviamo che

- la somma delle molteplicità delle radici di un polinomio di grado n è sempre minore o uguale a n; tale somma vale n se e solo se il polinomio è totalmente riducibile.

9.2 Secondo criterio di diagonalizzabilità

Sia f un endomorfismo di V^n e A una matrice associata. Sappiamo che gli autovalori di f sono le radici di $p_A(x)$, il polinomio caratteristico di A.

- Definiamo *molteplicità algebrica* dell'autovalore λ la molteplicità di λ quale radice di $p_A(x)$. Essa si denota con il simbolo

$$MA(\lambda).$$

Ricordiamo che un polinomio è totalmente riducibile se e solo se la somma delle molteplicità delle sue radici è uguale al suo grado. Dunque:

- Il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori vale n.

Un'autovalore λ dà luogo a due molteplicità: la molteplicità algebrica $MA(\lambda)$ e la molteplicità geometrica $MG(\lambda)$ (definita, ricordiamo, come la dimensione dell'autospazio associato $E(\lambda)$).

Esempio Supponiamo che una matrice associata a f sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Allora

$$p_A(x) = (x-2)^3(x-3).$$

Abbiamo due autovalori: $\lambda_1 = 2$, di molteplicità algebrica 3, e $\lambda_2 = 3$, di molteplicità algebrica 1. Si verifica che

$$MG(2) = 4 - \mathrm{rk}(A - 2I) = 4 - 3 = 1$$

e inoltre $MG(3) = 1$. Quindi $MA(2) > MG(2)$ mentre $MA(3) = MG(3)$.

Proposizione *Se λ è un autovalore si ha sempre*

$$MA(\lambda) \geq MG(\lambda) \geq 1.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza $MG(\lambda) \geq 1$ è stata già osservata. La dimostrazione della disuguaglianza $MA(\lambda) \geq MG(\lambda)$ è omessa. □

Veniamo ora al risultato piú importante di questa sezione.

Teorema *Un endomorfismo di V^n è diagonalizzabile se e solo se*

1) *il polinomio caratteristico di f è totalmente riducibile;*

2) *per ogni autovalore λ si ha $MA(\lambda) = MG(\lambda)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che 1) e 2) siano verificate, e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori distinti di f. Allora, poiché $p_f(x)$ è totalmente riducibile, abbiamo

$$\sum_{j=1}^{k} MA(\lambda_j) = n.$$

D'altra parte, abbiamo $MA(\lambda_j) = MG(\lambda_j)$ per ogni j, dunque

$$\sum_{j=1}^{k} MG(\lambda_j) = n$$

e f risulta diagonalizzabile grazie al primo criterio, dimostrato nella sezione precedente.

Viceversa, se f è diagonalizzabile si avrà $\sum_{j=1}^{k} MG(\lambda_j) = n$. Dunque

$$n \geq \sum_{j=1}^{k} MA(\lambda_j) \geq \sum_{j=1}^{k} MG(\lambda_j) = n,$$

dove la prima disuguaglianza scende dal fatto che il polinomio caratteristico ha grado n, e la seconda è vera poiché $MA(\lambda_j) \geq MG(\lambda_j)$ per ogni j. Ne segue che le due disuguaglianze devono essere uguaglianze, quindi

$$\sum_{j=1}^{k} MA(\lambda_j) = n,$$

e $p_f(x)$ è totalmente riducibile. Inoltre, necessariamente $MA(\lambda_j) = MG(\lambda_j)$ per ogni j.
$\square$

- L'autovalore λ si dice *semplice* se $MA(\lambda) = 1$, e si dice *multiplo* se $MA(\lambda) > 1$.

Dalla proposizione, vediamo che se λ è semplice allora $MA(\lambda) = MG(\lambda) = 1$. Dunque, è sufficiente determinare l'uguaglianza delle molteplicità solo per gli autovalori multipli.

Concretamente, abbiamo il seguente algoritmo alternativo per stabilire se un dato endomorfismo f è diagonalizzabile oppure no.

1) Consideriamo una matrice associata A e calcoliamo $p_A(x)$.

2) Se $p_A(x)$ non è totalmente riducibile allora f non è diagonalizzabile e abbiamo finito.

3) Se $p_A(x)$ è totalmente riducibile, consideriamo gli autovalori multipli, diciamo $\lambda_1, \dots, \lambda_h$. Se le molteplicità algebriche e geometriche di ciascuno di questi autovalori coincidono allora f è diagonalizzabile, altrimenti no.

Esempio Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica (vedi esempio precedente). Si ha $p_A(x) = (x-2)^3(x-3)$, che è totalmente riducibile, con un solo autovalore multiplo $\lambda_1 = 2$ di molteplicità algebrica 3 (l'altro autovalore $\lambda_2 = 3$ è semplice). È dunque sufficiente calcolare la molteplicità geometrica dell'autovalore 2. Si ha $MG(2) = 1$, dunque $MA(2) > MG(2)$ e l'endomorfismo f non è diagonalizzabile.

Esempio Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Un calcolo mostra che

$$p_A(x) = (x-2)^2(x^2+x+1).$$

Il fattore quadratico x^2+x+1 non ammette radici, dunque $p_A(x)$ non è totalmente riducibile. Di conseguenza f non è diagonalizzabile.

Esempio Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbf{R}^4$ rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica. Un calcolo mostra che

$$p_A(x) = (x^2-5x+6)(x^2-2x-3) = (x+1)(x-2)(x-3)^2$$

Il polinomio caratteristico è totalmente riducibile, con autovalori $-1, 2, 3$ di cui solo il terzo è multiplo:

$$MA(3) = 2.$$

È sufficiente dunque calcolare $MG(3)$. Si ha:

$$\mathrm{rk}(A-3I) = \mathrm{rk}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2,$$

dunque

$$MG(3) = 4 - \mathrm{rk}(A-3I) = 2.$$

In conclusione, $MA(3) = MG(3) = 2$ per l'unico autovalore multiplo, dunque f è diagonalizzabile.

- È chiaro a questo punto che le molteplicità geometriche degli autovalori sono:

$$MG(-1) = MG(2) = 1 \quad \text{e } MG(3) = 2.$$

Dunque f ammette una base di autovettori

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$$

con v_1 associato all'autovalore -1, v_2 associato all'autovalore 2, e v_3, v_4 entrambi associati all'autovalore 3. La matrice associata a f rispetto a tale base è

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Di conseguenza, A è simile a D: se M è la matrice di colonne v_1, v_2, v_3, v_4 allora

$$D = M^{-1}AM.$$

Per esercizio, calcolare esplicitamente una base di autovettori e la matrice di passaggio M.

9.3 Esempi su spazi di matrici

In questa sezione daremo esempi di endomorfismi di $\mathbf{Mat}(2\times 2)$. La base canonica di $\mathbf{Mat}(2\times 2)$ sarà scritta (E_1, E_2, E_3, E_4) con

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esempio Consideriamo l'endomorfismo $T : \mathbf{Mat}(2\times 2) \to \mathbf{Mat}(2\times 2)$ definito da $T(A) = A + A^t$. Dimostrare che T è diagonalizzabile.

Soluzione. Esplicitamente $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$. Dunque la matrice associata a T nella base canonica è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico è $p_A(x) = x(x-2)^3$, con autovalori distinti $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2$. Si ha $\mathrm{rk}A = 3$ quindi $MG(0) = 1$, $\mathrm{rk}(A-2I) = 1$ quindi $MG(2) = 3$. Si ha:

$$MG(0) + MG(2) = 4 = \dim \mathbf{Mat}(2 \times 2),$$

dunque T è diagonalizzabile. Troviamo ora basi di ciascun autospazio. Una base di $E(0)$ è $E_2 - E_3$. Una base di $E(2)$ è $(E_1, E_2 + E_3, E_4)$. Dunque una base di $\mathbf{Mat}(2 \times 2)$ formata da autovettori è:

$$(E_2 - E_3, E_1, E_2 + E_3, E_4) = (\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Esempio Consideriamo l'endomorfismo $T : \mathbf{Mat}(2 \times 2) \to \mathbf{Mat}(2 \times 2)$ definito da $T(A) = AN$, dove $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Stabilire se T è diagonalizzabile.

Soluzione. Esplicitamente $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & x-y \\ z-w & z-w \end{pmatrix}$. La matrice associata nella base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Un calcolo mostra che $p_A(x) = x^4$. Abbiamo dunque un solo autovalore $\lambda_1 = 0$ con $MA(0) = 4$. Poichè $\mathrm{rk}A = 2$ si ha $MG(0) = 2 < 4$, dunque T non è diagonalizzabile.

Esempio Sia $T : \mathbf{Mat}(2 \times 2) \to \mathbf{Mat}(2 \times 2)$ definito da $T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x+6y & -2x+5y \\ -2z+w & w \end{pmatrix}$. Stabilire se T è diagonalizzabile.

Soluzione. Matrice di T nella base canonica:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinomio caratteristico $p_A(x) = (x-1)^2(x+2)(x-2)$, totalmente riducibile. Abbiamo tre autovalori distinti $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, di cui solo il primo è multiplo: $MA(1) = 2$. Si ha $\mathrm{rk}(A - I) = 2$ dunque $MG(1) = 2 = MA(1)$: per il secondo criterio, T è diagonalizzabile. Si può verificare che una base di autovettori è:

$$\left(\begin{pmatrix}2 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & 2\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}\right),$$

in cui i primi due autovettori sono associati a 1, il terzo autovettore è associato a 2 e il quarto a -2. In questa base la matrice associata è:

$$A' = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

10 Matrici diagonalizzabili

Se A è una matrice quadrata $n \times n$, diremo che il vettore colonna $v \in \mathbf{R}^n$, con $v \neq O$, è un *autovettore* di A se

$$Av = \lambda v,$$

per un certo $\lambda \in \mathbf{R}$, detto *autovalore* relativo a v. In altre parole:

- v è un autovettore di A se e solo se v è un autovettore dell'endomorfismo di $\mathbf{R}^n$ rappresentato da A rispetto alla base canonica.
- Diremo che la matrice A è *diagonalizzabile* se A è simile ad una matrice diagonale; se cioè possiamo trovare una matrice diagonale D e una matrice invertibile M tali che

$$D = M^{-1}AM. \tag{5}$$

Diagonalizzare una matrice (quando ciò è possibile) significa trovare matrici D e M che verificano la relazione (5).

Il teorema seguente ci dice quando è possibile diagonalizzare una matrice.

Teorema *Sia A una matrice quadrata, e f l'operatore di $\mathbf{R}^n$ rappresentato da A rispetto alla base canonica. Allora:*

a) *A è diagonalizzabile se e solo se f è diagonalizzabile.*

b) *Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una base di autovettori di f, associati rispettivamente agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (non necessariamente distinti) e se M è la matrice di colonne $v_1, \dots, v_n$, allora si ha:*

$$M^{-1}AM = D$$

dove D è la matrice diagonale di elementi diagonali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, rispettivamente.

In altre parole, A è simile alla matrice i cui elementi diagonali sono gli autovalori di f, e M è la matrice le cui colonne formano una base di autovettori di f (presi nello stesso ordine degli autovalori).

Dimostrazione. a) Se f è diagonalizzabile, allora esiste una matrice associata diagonale D: sappiamo che matrici associate allo stesso endomorfismo sono simili, dunque A è simile a D. Il viceversa si dimostra in modo analogo.
b) Sappiamo che nella base di autovettori $\mathcal{B}$ l'endomorfismo f si rappresenta con la matrice diagonale D avente elementi diagonali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, e che

$$D = M^{-1}AM$$

dove M è la matrice di passaggio dalla base canonica alla base di autovettori $\mathcal{B}$. Per definizione di matrice di passaggio, le colonne di M sono proprio i vettori di $\mathcal{B}$, e dunque si ha (b). $\square$

10.1 Esempio

Diagonalizzare, se possibile, la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Soluzione. Gli autovalori distinti di A sono $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$, sono due, dunque A è diagonalizzabile. Base di autovettori:

$$(v_1, v_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Dunque $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e risulta $D = M^{-1}AM$.

10.2 Serie di esempi

Consideriamo le seguenti matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vediamo quali fra queste sono diagonalizzabili, applicando il secondo criterio.

Matrice A_1. Polinomio caratteristico $-(x-1)^2(x+3)$, totalmente riducibile. Autovalori distinti $1, -3$, di cui solo il primo è multiplo, con $MA(1) = 2$. Si ha $MG(3) = 1 < MA(1)$. Quindi A_1 non è diagonalizzabile.

Matrice A_2. Polinomio caratteristico $-(x-1)^2(x-3)$, totalmente riducibile. Autovalori distinti $1, 3$, di cui solo il primo è multiplo, con $MA(1) = 2$. Si ha $MG(1) = 2$ quindi A_2 è diagonalizzabile.

Matrice A_3. Polinomio caratteristico $-(x-1)(x-2)(x+1)$. Autovalori distinti $1, 2, -1$: sono tre, tutti semplici, quindi A_3 è diagonalizzabile.

Matrice A_4. Polinomio caratteristico $-(x-2)(x^2+1)$: il fattore quadratico x^2+1 non ha radici, dunque il polinomio caratteristico non è totalmente riducibile e A_4 non è diagonalizzabile.

Possiamo diagonalizzare solo A_2 e A_3.

Diagonalizzazione di A_2. Autovalori $1, 3$. Cerchiamo una base degli autospazi. Si ha

$$A_2 - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e l'autospazio $E(1)$ si ottiene risolvendo il sistema $(A_2 - I)X = O$. Un calcolo mostra che una base di $E(1)$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si ha poi

$$A_2 - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui una base di $E(3)$ è $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Unendo le basi dei due autospazi otteniamo la base di autovettori:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{associati, nell'ordine, a } 1, 1, 3.$$

Dunque

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Possiamo verificare che $D = M^{-1}AM$ ovvero che $MD = AM$.

Diagonalizzazione di A_3. Autovalori $1, 2, -1$. Si ha:

$$A_3 - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \text{base di} \quad E(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A_3 - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{base di} \quad E(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A_3 + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{base di} \quad E(-1) = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Quindi una base di autovettori è:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5/2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{associati, nell'ordine, a } 1, 2, -1.$$

Si ha dunque:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$