

## Parte 9. Geometria del piano

A. Savo – Appunti del Corso di Geometria 2013-14

### INDICE DELLE SEZIONI

- 1 Vettori geometrici del piano, 1
- 2 Lo spazio vettoriale  $V_O^2$ , 3
- 3 Sistemi di riferimento, 8
- 4 Equazioni parametriche di una retta, 13
- 5 Equazione cartesiana di una retta, 16
- 6 Parallelismo e intersezione di rette, 18
- 7 Il prodotto scalare in  $V_O^2$ , 22
- 8 Distanze e angoli, 24
- 9 Perpendicolarità di rette, 26

## 1 Vettori geometrici del piano

### 1.1 Definizione

Un *vettore del piano* è una coppia ordinata di punti  $(A, B)$ . Denoteremo il vettore con il simbolo

$$\overrightarrow{AB}$$

e disegneremo il vettore con una freccia che unisce (nell'ordine) il punto  $A$  con il punto  $B$ :

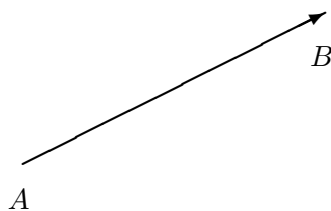


Figura 1: Vettore applicato in  $A$

Il punto  $A$  è detto *punto di applicazione* mentre il punto  $B$  è detto *vertice* del vettore. Il vettore  $\overrightarrow{AA}$  è, per definizione, il *vettore nullo*.

Un vettore non nullo è individuato da:

- un punto di applicazione (il punto  $A$ ),
- una *direzione* (quella della retta per  $A$  e  $B$ ),
- un *verso* (quello da  $A$  a  $B$ ),
- un *modulo* (la lunghezza del segmento  $AB$ ).

Il modulo si indica  $\|\overrightarrow{AB}\|$ ; ovviamente il modulo di  $\overrightarrow{AB}$  uguaglia la distanza di  $A$  da  $B$ .

Vettori che hanno la stessa direzione sono contenuti in rette parallele, e si dicono *paralleli*. Per convenzione, il vettore nullo è parallelo a tutti i vettori.

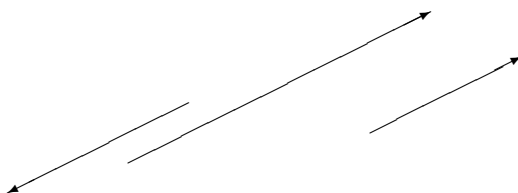


Figura 2: Vettori paralleli

Vettori che hanno stessa direzione, verso e modulo si dicono *equipollenti*. Vettori equipollenti differiscono solamente per il punto di applicazione.

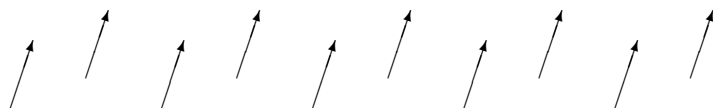


Figura 3: Vettori equipollenti

## 1.2 Traslazioni

È evidente dal V postulato di Euclide che, dato un vettore  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  e un altro punto  $A'$ , esiste un unico punto  $B'$  tale che  $\overrightarrow{A'B'}$  è equipollente a  $\vec{v}$ :

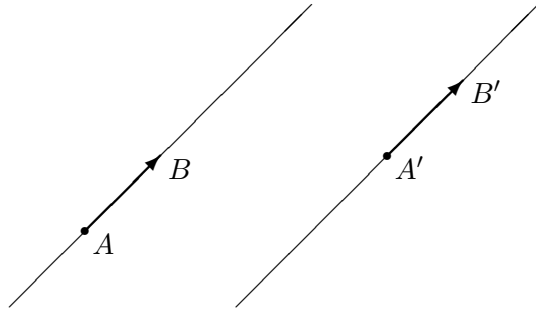


Figura 4: Traslato di un vettore

Il vettore  $\overrightarrow{A'B'}$  è detto il *traslato* di  $\overrightarrow{AB}$  in  $A'$ . È evidente che allora il quadrilatero  $AA'B'B$  è un parallelogramma.

- Se  $A'$  appartiene alla retta  $r$  per  $A$  e  $B$ , allora  $B'$  è l'unico punto della retta  $r$  tale che

$$\begin{cases} d(A', B') = d(A, B), \\ \overrightarrow{AB} \text{ e } \overrightarrow{A'B'} \text{ hanno lo stesso verso.} \end{cases}$$

Un vettore  $\vec{v}$  definisce così una *classe di vettori equipollenti*: ne ho uno per ogni punto del piano.

## 2 Lo spazio vettoriale $V_O^2$

### 2.1 Vettori applicati in un punto

Supponiamo ora di fissare un punto  $O$  del piano, detto *origine*, e consideriamo l'insieme di tutti i vettori applicati in  $O$ , denotato con  $V_O^2$ :

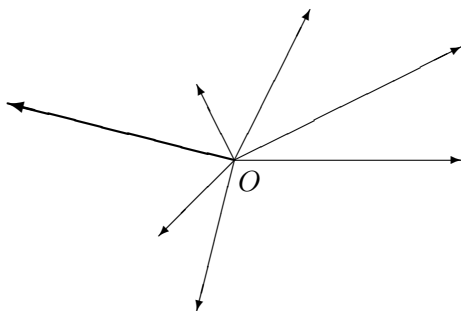


Figura 5: Vettori applicati in  $O$

Vogliamo introdurre in  $V_O^2$  operazioni di somma e di prodotto per uno scalare in modo da ottenere uno spazio vettoriale.

## 2.2 Somma di due vettori

Siano  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$  due vettori applicati in  $O$ . Definiamo  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$  dove

$C$  = vertice dell'unico vettore applicato in  $B$  ed equipollente a  $\overrightarrow{OA}$ .

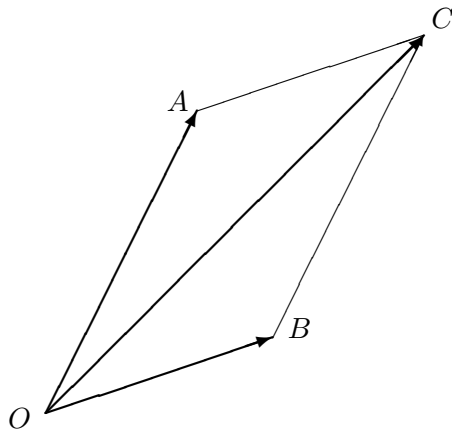
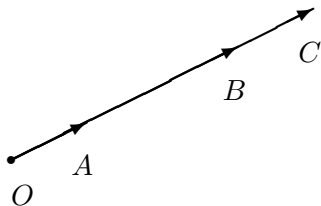


Figura 6: Regola del parallelogramma

Dalla figura è evidente che, se  $B$  non è allineato con  $O$  e  $A$  allora:

$$C = \text{quarto vertice del parallelogramma su } \overrightarrow{OA} \text{ e } \overrightarrow{OB}.$$

Ma la definizione funziona anche quando  $O, A, B$  sono allineati. Nella figura seguente, si ha  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ :



La somma si effettua dunque con quella che viene comunemente chiamata *regola del parallelogramma*.

### 2.3 Moltiplicazione per uno scalare

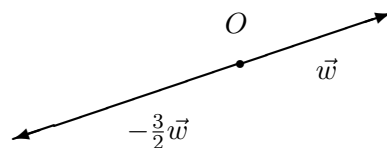
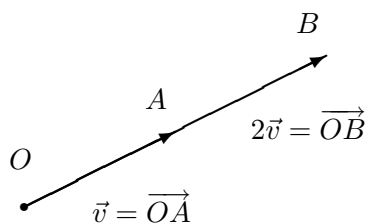
Dato  $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$  vogliamo definire il vettore  $k\vec{v}$  per ogni  $k \in \mathbf{R}$ .

- Se  $\vec{v} = \vec{O}$  definiamo  $k\vec{v} = \vec{O}$ ; se  $k = 0$  allora  $k\vec{v} = \vec{O}$ .

Sia ora  $k \neq 0$  e  $\vec{v} \neq \vec{O}$ . Allora il vettore  $k\vec{v}$  ha:

- la stessa direzione di  $\vec{v}$ ,
- lo stesso verso di  $\vec{v}$  se  $k > 0$ , verso opposto a quello di  $\vec{v}$  se  $k < 0$ ,
- modulo dato da  $|k| \|\vec{v}\|$ .

In pratica,  $k\vec{v}$  si ottiene dilatando  $\vec{v}$  per il fattore  $|k|$ , e cambiando di verso se  $k < 0$ :



### 2.4 Assiomi di spazio vettoriale

Le operazioni appena introdotte verificano gli assiomi di spazio vettoriale. In particolare:

- La somma è *associativa*:  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ .

Questa proprietà si può dimostrare con i risultati noti di geometria euclidea elementare.

- La somma è *commutativa*:  $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$ .

- Notiamo che: se  $\vec{0} = \overrightarrow{O\vec{O}}$  indica il vettore nullo di  $V_O^2$ , allora

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$$

per ogni  $\vec{v} \in V_O^2$ .

- Ogni vettore ha il suo *vettore opposto*. Infatti, se  $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ , sia  $A'$  il simmetrico di  $A$  rispetto all'origine: è evidente che  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'} = \vec{0}$ , quindi  $-\vec{v} = \overrightarrow{OA'}$

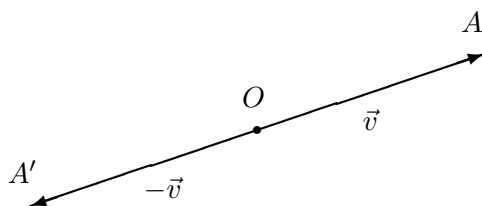


Figura 7: Vettori opposti

Le altre proprietà di spazio vettoriale sono verificate (come si dimostra facilmente), dunque:

**Proposizione** *L'insieme  $V_O^2$  dei vettori applicati nell'origine, con le operazioni di somma e prodotto per uno scalare appena introdotte, è uno spazio vettoriale.*

## 2.5 Proprietà di $V_O^2$

La seguente proprietà è vera in *ogni* spazio vettoriale:

- Un vettore  $\vec{v}$  è linearmente indipendente se e solo se  $\vec{v} \neq \vec{0}$ .

Notiamo che se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono vettori applicati nell'origine:  $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$  allora  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono paralleli se e solo se i punti  $O, A, B$  sono allineati:

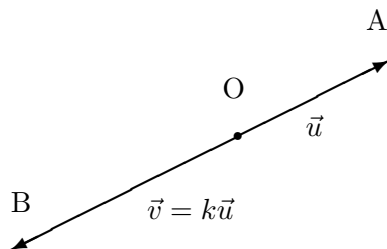


Figura 8: Vettori paralleli di  $V_O^2$

**Proposizione** Due vettori  $\vec{u}, \vec{v}$  di  $V_O^2$  sono linearmente dipendenti se e solo se sono paralleli.

*Dimostrazione.* Infatti sappiamo che, in uno spazio vettoriale qualunque, due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno di essi è un multiplo dell'altro. È ora evidente che, ad esempio,  $\vec{v} = k\vec{u}$  se e solo se  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  sono paralleli.  $\square$

Nella figura,  $\vec{OA}$  e  $\vec{OB}$  sono linearmente indipendenti, mentre  $\vec{OC}$  e  $\vec{OD}$  sono linearmente dipendenti:



Figura 9: Vettori linearmente indipendenti e linearmente dipendenti

Dimostriamo ora:

**Teorema** La dimensione di  $V_O^2$  è pari a 2. Le basi di  $V_O^2$  sono tutte e sole le coppie costituite da vettori non paralleli.

*Dimostrazione.* Consideriamo due vettori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  non paralleli, dunque linearmente indipendenti. È sufficiente dimostrare che ogni vettore applicato in  $O$ , diciamo  $\vec{OP}$ , è una combinazione lineare di  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ : in questo modo  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  è anche un insieme di generatori, e quindi una base. Che  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  sia un insieme di generatori è evidente dalla figura; il lettore è invitato a specificare i dettagli della costruzione geometrica che dimostra questo fatto.

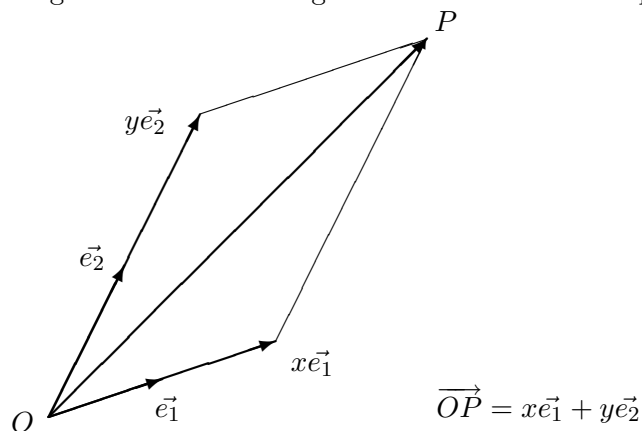


Figura 10: Base di  $V_O^2$

Ne segue che  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  sono anche generatori e formano una base.  $\square$

Dal teorema segue in particolare che tre vettori di  $V_O^2$  sono sempre linearmente dipendenti. In effetti, è facile dimostrare tale proprietà direttamente dalle definizioni di somma e prodotto per uno scalare, aiutandosi con una figura opportuna.

Fra tutte le basi di  $V_O^2$  distingueremo una classe particolare di basi: le basi ortonormali.

- Una base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  si dice *base ortonormale* se i vettori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  sono ortogonali e hanno modulo 1.

### 3 Sistemi di riferimento

#### 3.1 Sistema di riferimento affine

Un *sistema di riferimento affine* nel piano consiste nella scelta di un punto  $O$  detto *origine* e di una base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  di  $V_O^2$ .

Un sistema di riferimento permette di descrivere i punti del piano con una coppia di numeri, le *coordinate* del punto. Precisamente, dato un punto  $P$ , consideriamo il vettore  $\vec{OP}$ , ed esprimiamo tale vettore come combinazione lineare dei vettori della base scelta:

$$\vec{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$



Diremo allora che  $P$  ha coordinate  $(x, y)$  e identificheremo il punto  $P$  con le sue coordinate:

$$P = (x, y).$$

L'origine ha coordinate  $(0, 0)$ . La retta su cui giace  $\vec{e}_1$  è detta *asse x*, mentre la retta su cui giace  $\vec{e}_2$  è detta *asse y*. Gli assi sono orientati in modo concorde con i vettori della base.

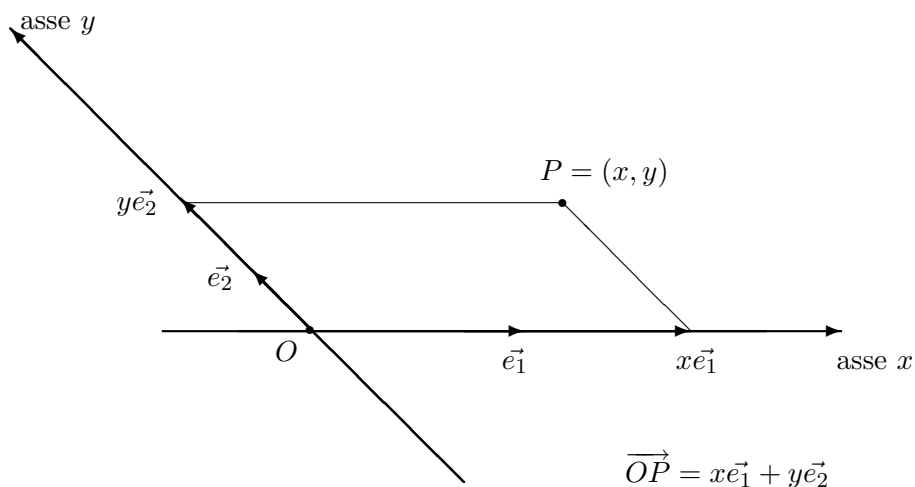


Figura 11: Sistema di riferimento affine e coordinate di un punto

### 3.2 Sistema di riferimento cartesiano

Se la base  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  scelta è ortonormale, nel senso che i vettori  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  sono ortogonali e di modulo 1, diremo allora che il sistema di riferimento è *cartesiano*, e le coordinate di un punto  $P$  sono dette *coordinate cartesiane*.

In un sistema di riferimento cartesiano gli assi coordinati sono ortogonali fra loro. Inoltre, dato un punto  $P$  del piano, detto  $P_1$  (risp.  $P_2$ ) il piede della perpendicolare condotta da  $P$  all'asse  $x$  (risp. asse  $y$ ), si ha che, se  $P = (x, y)$  allora

$$\begin{cases} x = \text{ascissa di } P = \text{distanza (con segno) di } P_1 \text{ dall'origine} \\ y = \text{ordinata di } P = \text{distanza (con segno) di } P_2 \text{ dall'origine} \end{cases}$$

L'ascissa  $x$  è positiva se  $P_1$  segue l'origine rispetto al verso dell'asse  $x$  (orientato in modo concorde al verso del vettore  $\vec{e}_1$ ). L'ascissa è nulla se il punto appartiene all'asse  $y$  ed è negativa se  $P_1$  precede l'origine. Simili considerazioni valgono riguardo all'ordinata. Nella figura che segue, il punto  $P$  ha coordinate positive.

Per definizione, si ha  $\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ .

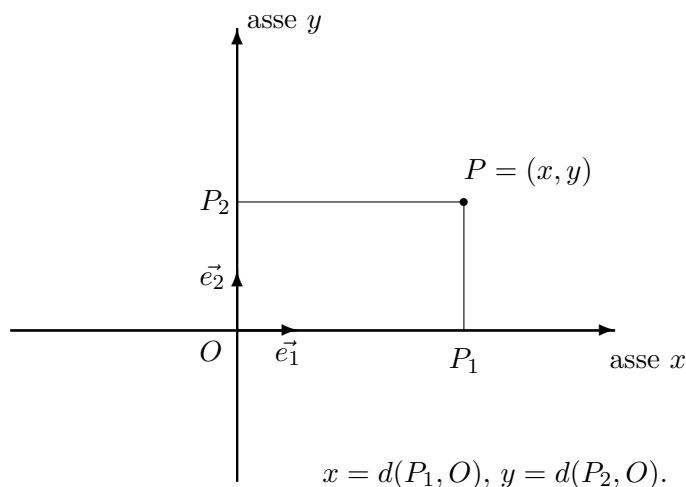


Figura 12: Coordinate cartesiane

D'ora in poi sceglieremo sempre un sistema di riferimento cartesiano.

### 3.3 Coordinate di un vettore

**Teorema** Se il vettore  $\overrightarrow{OP}$  ha coordinate  $(x, y)$  e il vettore  $\overrightarrow{OP'}$  ha coordinate  $(x', y')$  allora:

- a) Il vettore  $k\overrightarrow{OP}$  ha coordinate  $k(x, y) = (kx, ky)$ .
- b) Il vettore  $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}$  ha coordinate  $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ .

*Dimostrazione.* È sufficiente osservare che, per definizione,  $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$  e  $\overrightarrow{OP'} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$  e applicare le proprietà di spazio vettoriale.  $\square$

Il teorema si enuncia dicendo anche che, se  $F : V_{\mathbf{O}}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  è l'applicazione che associa a un vettore le sue coordinate rispetto alla base scelta, allora  $F$  è un'applicazione lineare; tale applicazione è inoltre biiettiva, dunque è *isomorfismo di spazi vettoriali*. (In realtà questo fatto è vero in ogni spazio vettoriale).

Spesso identificheremo anche un vettore con le sue coordinate. Dunque la scrittura

$$\overrightarrow{OP} = (x, y)$$

significherà

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Vogliamo ora attribuire coordinate a un vettore  $\overrightarrow{AB}$  applicato in un punto qualunque  $A$  del piano.

**Definizione** Le coordinate del vettore  $\overrightarrow{AB}$  sono, per definizione, le coordinate del vettore  $\overrightarrow{OC}$ , traslato di  $\overrightarrow{AB}$  nell'origine.

(Vedi Figura 13).

**Proposizione** Le coordinate del vettore  $\overrightarrow{AB}$  sono date dalla differenza fra le coordinate del vertice e quelle del punto di applicazione. In altre parole, se  $A = (x, y)$  e  $B = (x', y')$  allora le coordinate del vettore  $\overrightarrow{AB}$  sono

$$(x' - x, y' - y).$$

- Spesso scriveremo, in breve, che le coordinate di  $\overrightarrow{AB}$  sono  $B - A$ .

*Dimostrazione.* Se  $\overrightarrow{OC}$  è il traslato di  $\overrightarrow{AB}$  nell'origine, dalla legge del parallelogramma abbiamo che  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$  dunque:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Le coordinate di  $\overrightarrow{AB}$  sono, per definizione, quelle di  $\overrightarrow{OC}$ : prendendo le coordinate di ambo i membri della relazione vettoriale precedente, vediamo che le coordinate di  $\overrightarrow{OC}$  valgono  $(x', y') - (x, y) = (x' - x, y' - y)$ .  $\square$

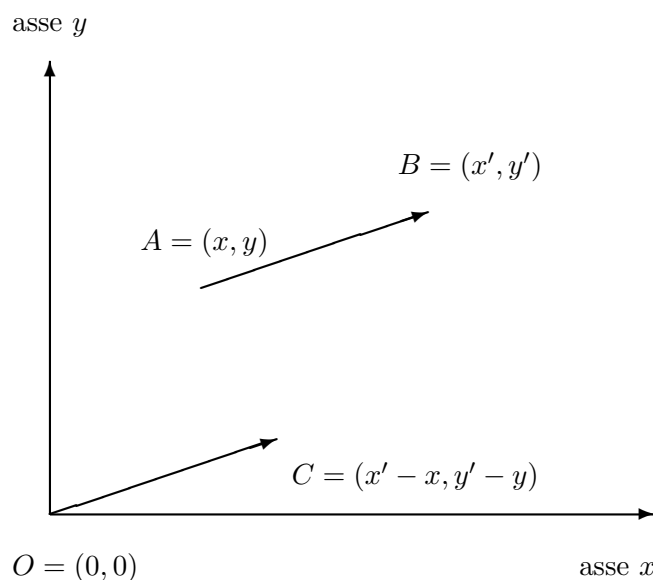


Figura 13: Traslato nell'origine

È evidente che vettori equipollenti hanno lo stesso traslato nell'origine, dunque hanno coordinate uguali. È vero anche il viceversa. In conclusione

- due vettori del piano sono equipollenti se e solo se hanno coordinate uguali.

Un vettore del piano è determinato dalle sue coordinate, e dal punto di applicazione.

**Esempio** Trovare il vertice dell'unico vettore del piano di coordinate  $(-1, 4)$  applicato nel punto  $A = (2, 3)$ .

*Soluzione.* Se  $B = (x, y)$  è il vertice del vettore cercato, si dovrà avere

$$B - A = (-1, 4),$$

da cui  $B = (2, 3) + (-1, 4) = (1, 7)$ .  $\square$

**Esempio** Sono dati i punti  $A = (1, 1)$ ,  $B = (2, 3)$ ,  $C = (3, -1)$ . Determinare le coordinate del punto  $D$ , quarto vertice del parallelogramma costruito su  $AB$  e  $AC$ .

*Soluzione.* Risolviamo con l'algebra dei vettori. Dalla legge del parallelogramma il punto  $D$  è tale che:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

Prendendo le coordinate di ambo i membri, avremo quindi un'uguaglianza tra coppie di numeri:  $B - A + C - A = D - A$ , e dunque:

$$D = B + C - A = (2, 3) + (3, -1) - (1, 1) = (4, 1),$$

Quindi  $D = (4, 1)$ .  $\square$

## 4 Equazioni parametriche di una retta

D'ora in poi fissiamo nel piano un sistema di coordinate cartesiane, con origine  $O$  e base ortonormale di riferimento  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ .

### 4.1 Vettore direttore, parametri direttori

Data una retta  $r$  del piano, un vettore non nullo  $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$  si dice *vettore direttore* di  $r$  se  $\vec{v}$  è parallelo a  $r$ .

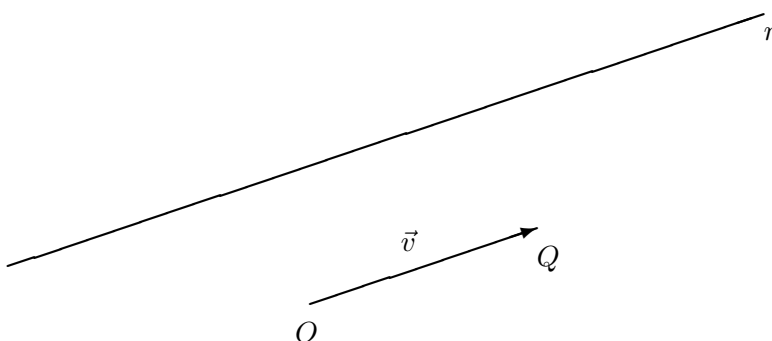


Figura 14: Vettore direttore di  $r$

**Definizione** Le coordinate di un qualunque vettore direttore di  $r$  sono dette *parametri direttori* di  $r$ .

È chiaro che  $\overrightarrow{OQ}$  è un vettore direttore di  $r$  se e solo se  $Q$  appartiene alla retta per l'origine parallela a  $r$ : quindi una stessa retta ha infiniti vettori direttori, tutti paralleli tra loro. Poiché vettori paralleli hanno coordinate proporzionali, si avrà che

- Una retta ha infiniti parametri direttori, tutti proporzionali tra loro.

Diremo anche che i parametri direttori di una retta sono definiti *a meno di un fattore di proporzionalità*.

**Proposizione** Data una retta  $r$  del piano, sia  $P_0$  un punto di  $r$  e  $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$  un vettore direttore di  $r$ . Allora il punto  $P$  appartiene alla retta  $r$  se e solo se esiste  $t \in \mathbf{R}$  tale che:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $r'$  la retta per l'origine parallela a  $r$ . Con riferimento alla figura sottostante, consideriamo il punto  $Q'$  su  $r'$  tale che  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \overrightarrow{OQ'}$ . Ora  $\overrightarrow{OQ'}$  è parallelo a  $\overrightarrow{OQ}$ , dunque esiste  $t \in \mathbf{R}$  tale che  $\overrightarrow{OQ'} = t\overrightarrow{OQ}$  e si ha  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\vec{v}$ .

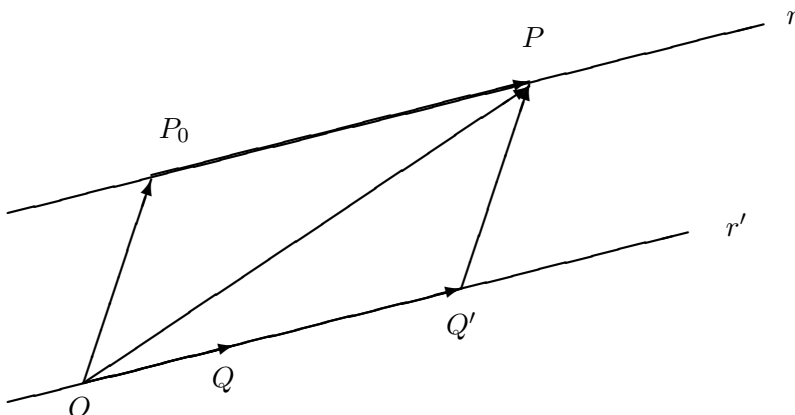


Figura 15: Equazione vettoriale di una retta

□

## 4.2 Equazioni parametriche

Una retta del piano è individuata da un suo punto e da una direzione. La direzione è specificata da un vettore direttore di  $r$ , che a sua volta è individuato dalle sue coordinate (parametri direttori di  $r$ ). Dunque sarà possibile determinare una retta mediante

- un suo punto  $P_0$ ,
- i suoi parametri direttori  $(l, m)$ .

**Proposizione** Sia  $r$  una retta,  $P_0 = (x_0, y_0)$  un suo punto, e  $\vec{v} = \overrightarrow{OQ}$  un suo vettore direttore, di coordinate  $(l, m)$ . Allora  $r$  può essere descritta dalle seguenti equazioni, dette equazioni parametriche della retta  $r$ :

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

Le equazioni vanno interpretate nel seguente modo: il punto  $(x, y)$  appartiene alla retta  $r$  se e solo se esiste  $t \in \mathbf{R}$  tale che le due equazioni sono entrambe verificate. Al variare di  $t \in \mathbf{R}$  otteniamo le coordinate di tutti i punti di  $r$ .

*Dimostrazione.* Dall' equazione vettoriale della retta, dimostrata nella proposizione precedente, abbiamo che il punto  $P$  appartiene alle retta  $r$  se e solo se

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\overrightarrow{OQ}$$

per qualche  $t \in \mathbf{R}$ . Dette  $(x, y)$  le coordinate di  $P$ , abbiamo la seguente uguaglianza tra vettori di  $\mathbf{R}^2$ :

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(l, m),$$

e la tesi è dimostrata.  $\square$

**Esempio** a) Scrivere le equazioni parametriche della retta  $r$  passante per il punto  $P_0 = (1, -2)$  e parallela al vettore  $\vec{v} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ .

b) Stabilire se il punto  $A = (3, 2)$  appartiene alla retta.

*Soluzione.* a) Il vettore  $\vec{v}$  è un vettore direttore della retta, dunque i parametri direttori di  $r$  sono le coordinate di  $\vec{v}$ , cioè:  $(l, m) = (1, 3)$ . Otteniamo le seguenti equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$$

b) Il punto  $A$  appartiene a  $r$  se e solo se esiste  $t \in \mathbf{R}$  tale che:

$$\begin{cases} 3 = 1 + t \\ 2 = -2 + 3t \end{cases}$$

Si vede subito che le due equazioni sono incompatibili, dunque  $A \notin r$ .  $\square$

**Esempio** Le equazioni  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 9t \end{cases}$  rappresentano la retta  $r'$  per il punto  $Q_0 = (2, 0)$  di parametri direttori  $(3, 9)$ .

### 4.3 Retta passante per due punti

**Proposizione** Siano  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  due punti distinti del piano, e sia  $r$  la retta passante per  $P_1$  e  $P_2$ .

a) I parametri direttori di  $r$  sono proporzionali alla coppia  $P_2 - P_1$ , cioè a:

$$\begin{cases} l = x_2 - x_1 \\ m = y_2 - y_1 \end{cases}$$

b) *Equazioni parametriche di  $r$  sono date da*

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t \end{cases}$$

*Dimostrazione.* a) Il vettore  $\overrightarrow{P_1P_2}$  è parallelo a  $r$ , e il suo traslato nell'origine  $\vec{v}$  sarà

dunque un vettore direttore di  $r$ . È sufficiente osservare che  $\vec{v}$  ha coordinate uguali a quelle di  $\overrightarrow{P_1P_2}$ , cioè  $P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ .

b) Basta osservare che  $r$  passa per  $P_1$  e che, per la a), i parametri direttori sono proporzionali alla coppia  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ .  $\square$

**Esempio** Scrivere le equazioni parametriche della retta passante per i punti  $P_1 = (1, 3)$  e  $P_2 = (5, -1)$ .

*Soluzione.* I parametri direttori di  $r$  sono proporzionali a  $P_2 - P_1 = (4, -4)$ ; la retta passa per  $P_1 = (1, 3)$  dunque:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 - 4t \end{cases}$$

Come già osservato, le equazioni parametriche *non* sono uniche. Ad esempio, potevamo prendere come punto iniziale il punto  $P_2 = (5, -1)$  e come parametri direttori la coppia  $(-1, 1)$ , proporzionale alla precedente. La stessa retta  $r$  si può quindi rappresentare anche nel seguente modo:

$$r : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

Notiamo che, eliminando il parametro  $t$ , otteniamo in entrambi i casi l'equazione nelle incognite  $x, y$ :

$$x + y - 4 = 0,$$

detta *equazione cartesiana* della retta  $r$ . Approfondiremo questo aspetto nella prossima sezione.  $\square$

## 5 Equazione cartesiana di una retta

In questa sezione vedremo come rappresentare una retta con una singola equazione in due variabili.



## 5.1 Condizione di allineamento di tre punti

Sappiamo che, nel piano, due punti sono sempre allineati (esiste cioè una retta che li contiene entrambi). In generale, però, tre punti possono risultare non allineati.

**Proposizione** I punti  $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), P_3 = (x_3, y_3)$  sono allineati se e solo se

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

*Dimostrazione.* I tre punti sono allineati se e solo se i vettori  $\overrightarrow{P_1P_2}$  e  $\overrightarrow{P_1P_3}$  applicati nel punto  $P_1$  sono paralleli, dunque linearmente dipendenti. Questo avviene se e solo se le rispettive coordinate:  $P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$  e  $P_3 - P_1 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1)$  sono vettori linearmente dipendenti di  $\mathbf{R}^2$ , da cui la condizione. Più in generale osserviamo (senza dimostrazione) la seguente interpretazione geometrica: il *modulo* del determinante

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

uguaglia l'area del parallelogramma costruito sui vettori  $\overrightarrow{P_1P_2}$  e  $\overrightarrow{P_1P_3}$ : tale area è nulla esattamente quando i punti sono allineati.  $\square$

**Esempio** Stabilire se i punti  $A = (1, 1), B = (2, 2), C = (2, -3)$  sono allineati oppure no.

*Soluzione.* Basta esaminare il determinante  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ : vale  $-5$ , dunque è diverso da zero e i punti non sono allineati. Infatti, l'area del parallelogramma costruito sui vettori  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  vale  $|-5| = 5$ .  $\square$

## 5.2 Equazione cartesiana di una retta

Abbiamo la seguente

**Proposizione** a) Ogni retta del piano si rappresenta con un'equazione lineare in due variabili, del tipo:

$$ax + by + c = 0, \tag{1}$$

con  $a, b$  non entrambi nulli, detta equazione cartesiana della retta. Questo significa che il punto  $P = (x, y)$  appartiene alla retta se e solo se le sue coordinate verificano l'equazione (1).

b) L'equazione cartesiana della retta per i due punti distinti  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$  è:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

*Dimostrazione.* Scegliamo due punti distinti della retta, diciamo  $P_1 = (x_1, y_1)$  e  $P_2 = (x_2, y_2)$ . Allora il punto generico  $P = (x, y)$  del piano appartiene a  $r$  se e solo esso risulta allineato con  $P_1, P_2$ . Dalla condizione di allineamento otteniamo dunque (dopo uno scambio di righe, che non altera l'equazione)

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sviluppando esplicitamente il determinante otteniamo un'equazione del tipo descritto nella parte a). Si noti in particolare che  $a = (y_2 - y_1), b = -(x_2 - x_1)$  non possono essere entrambi nulli altrimenti  $P_1 = P_2$ .  $\square$

**Esempio** L'equazione cartesiana della retta per i punti  $A = (2, 1), B = (1, -2)$  è

$$\begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{cioè } 3x - y - 5 = 0.$$

### 5.3 Forme particolari

Vediamo alcuni casi particolari dell'equazione (1).

- Se  $c = 0$  la retta passa per l'origine.

Infatti l'equazione diventa  $ax + by = 0$  e  $O = (0, 0)$  è evidentemente una soluzione.

- Se  $a = 0$  la retta è parallela all'asse  $x$ .

Infatti si ha  $by + c = 0$ , cioè  $y = -\frac{c}{b}$ : i punti della retta hanno ordinata costante, uguale a  $-\frac{c}{b}$  e la retta è parallela all'asse  $x$ .

- Se  $b = 0$  la retta è parallela all'asse  $y$ .

## 6 Parallelismo e intersezione di rette

Osserviamo che due rette del piano  $r, r'$  sono parallele (cioè hanno la stessa direzione) se coincidono ( $r = r'$ ) o non hanno punti in comune. In particolare, le rette  $r$  e  $r'$  non sono parallele se e solo se hanno un unico punto di intersezione.

**Proposizione** Siano  $r : ax + by + c = 0$  e  $r' : a'x + b'y + c' = 0$  due rette del piano. Allora:

a)  $r$  e  $r'$  sono parallele se e solo se:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0,$$

quindi se e solo se i rispettivi coefficienti sono proporzionali:  $(a', b') = k(a, b)$  per qualche  $k \in \mathbf{R}$ ;

b)  $r$  e  $r'$  si incontrano in un unico punto se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

*Dimostrazione.* È sufficiente dimostrare b). Le rette si incontrano in un unico punto se e solo se il sistema lineare

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione. Per il teorema di Cramer, questo avviene se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è non nullo:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0,$$

da cui la condizione.  $\square$

**Esempio** Le rette  $r : x + \frac{1}{2}y + 5 = 0$  e  $r' : 2x + y - 3 = 0$  hanno coefficienti proporzionali, quindi sono parallele. Osserviamo che l'equazione di  $r$  è equivalente a  $2x + y + 10 = 0$  e quindi le rette sono distinte.

**Esempio** Le rette  $r : x + \frac{1}{2}y + 5 = 0$  e  $r' : 2x + y + 10 = 0$  sono parallele e coincidenti.

**Esempio** Le rette  $r : x + y - 3 = 0$  e  $r' : 2x + y + 1 = 0$  non sono parallele, quindi hanno un unico punto in comune, ottenuto risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Troviamo il punto  $(-4, 7)$ .

## 6.1 Parametri direttori

Abbiamo visto due possibili rappresentazioni di una retta del piano:

- tramite equazioni parametriche,
- tramite un'equazione cartesiana.

Il passaggio dalle equazioni parametriche all'equazione cartesiana avviene eliminando il parametro.

**Esempio** La retta di equazioni parametriche  $r : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$  ha equazione cartesiana  $x + 2y + 5 = 0$  ottenuta sostituendo  $t = y - 2$  nella prima equazione. Notiamo che  $r$  ha parametri direttori proporzionali a  $(-2, 1)$ .

Il passaggio dall'equazione cartesiana alle equazioni parametriche avviene risolvendo l'equazione.

**Esempio** La retta di equazione cartesiana  $2x + y + 5 = 0$  ha equazioni parametriche  $\begin{cases} x = t \\ y = -5 - 2t \end{cases}$ .

In particolare, ha parametri direttori proporzionali a  $(1, -2)$ .

- In generale, i parametri direttori della retta  $r$  di equazione  $ax + by + c = 0$  sono proporzionali a  $(b, -a)$ ; in altre parole,  $r$  è parallela al vettore direttore  $b\vec{e}_1 - a\vec{e}_2$ .

## 6.2 Fasci di rette

### 6.3 Fascio di rette parallele

Fissata una retta  $r$ , il *fascio di rette parallele a  $r$*  è la totalità delle rette del piano parallele a  $r$ .

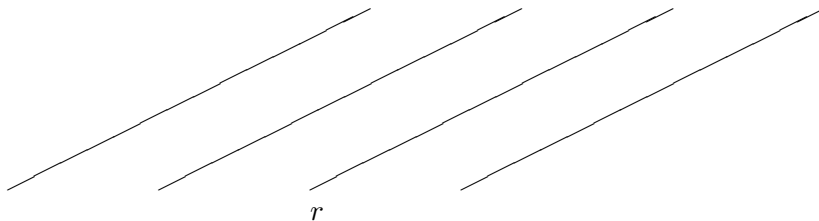


Figura 16: Fascio di rette parallele

**Esempio** È data la retta  $r : x + 3y - 5 = 0$ . Allora l'equazione della retta generica parallela a  $r$  si scrive

$$r' : x + 3y + k = 0,$$

con  $k \in \mathbf{R}$ , detta anche *equazione del fascio di rette parallele a  $r$* .

Infatti, la retta  $r' : ax + by + c = 0$  è parallela a  $r$  se e solo se  $(a, b) = \lambda(1, 3)$ , dunque:  $r' : \lambda x + 3\lambda y + c = 0$ , ma poiché  $\lambda \neq 0$  possiamo dividere per  $\lambda$  e abbiamo  $r' : x + 3y + k = 0$ , dove abbiamo posto  $k = \frac{c}{\lambda}$ .

**Esempio** È data la retta  $r : x + 3y - 5 = 0$ . Determinare l'equazione cartesiana della retta  $r'$  parallela a  $r$  e passante per  $(1, -1)$ .

*Soluzione.* Abbiamo visto che l'equazione della retta generica parallela a  $r$  è

$$r' : x + 3y + k = 0.$$

Sostituendo le coordinate  $(1, -1)$  nell'equazione otteniamo  $k = 2$ , dunque la retta cercata ha equazione

$$x + 3y + 2 = 0.$$

□

In generale, data la retta  $r : ax + by + c = 0$  allora la retta generica parallela a  $r$  ha equazione  $ax + by + k = 0$  con  $k$  parametro reale. In particolare, le rette del piano parallele a una data retta sono  $\infty^1$ .

In conclusione, per trovare la retta  $r'$  parallela ad una data retta  $r$  e passante per  $P$ , possiamo procedere in questo modo:

1. scrivere l'equazione del fascio di rette parallele a  $r$ ,
2. imporre il passaggio per il punto  $P$ .

#### 6.4 Fascio di rette passanti per un punto

Fissato un punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  il *fascio di rette passanti per  $P_0$*  è la totalità delle rette che passano per  $P_0$ .

Si vede facilmente che l'equazione della retta generica di tale fascio si scrive:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0,$$

con  $a$  e  $b$  non entrambi nulli.

**Esempio** È data la retta  $r : x + 3y - 5 = 0$ . Determinare l'equazione della retta  $r'$  parallela a  $r$  e passante per il punto  $P_0 = (1, -1)$ .

*Soluzione.* È l'esercizio del precedente paragrafo, che risolviamo in modo diverso. Scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per  $P_0$ :

$$a(x - 1) + b(y + 1) = 0,$$

ovvero  $ax + by - a + b = 0$ . Ora imponiamo il parallelismo con  $r$ : basta prendere  $(a, b) = (1, 3)$  da cui l'equazione

$$x + 3y + 2 = 0.$$

□

## 7 Il prodotto scalare in $V_O^2$

### 7.1 Definizione

Il *prodotto scalare* è un'operazione che associa a due vettori di  $V_O^2$  un numero reale, denotato con  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ . Precisamente, se  $\vec{v}, \vec{w}$  sono vettori applicati in  $O$ , definiamo:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \cos \theta,$$

dove  $\theta$  è l'angolo convesso (cioè tale che  $0 \leq \theta \leq \pi$ ) definito da  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

- Parlare di angolo ha senso solo quando sia  $\vec{v}$  che  $\vec{w}$  sono non nulli. Ma se uno dei due vettori è nullo poniamo per definizione  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ .

Abbiamo immediatamente:

**Proposizione** a) *Due vettori sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è nullo.*

b) *Si ha  $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$ .*

Dunque il prodotto scalare permette di misurare il modulo (lunghezza) di un vettore, e l'angolo fra due vettori. La proposizione seguente sarà utile per il calcolo esplicito del prodotto scalare.

**Proposizione** *Il prodotto scalare ha le seguenti proprietà. In ciò che segue,  $\vec{v}, \vec{w}, \dots$  sono vettori arbitrari applicati in  $O$  e  $k \in \mathbf{R}$ .*

a)  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ .

b)  $\langle \vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle$ .

c)  $\langle \vec{v}, k\vec{w} \rangle = k\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ .

d)  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$ .

e)  $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$  se e solo se  $\vec{v} = \vec{O}$ .

La proprietà a) dice che il prodotto scalare è commutativo. b) e c) esprimono le proprietà di *bilinearità*. Le proprietà d) e e) sono dette di *positività*.

*Dimostrazione.* Le proprietà sono di facile dimostrazione, ad eccezione della b), che richiede un pò di lavoro in più, e di cui omettiamo la dimostrazione.  $\square$

Osserviamo che, da a) e b), otteniamo:

$$\begin{aligned}\langle \vec{v}, a\vec{w}_1 + b\vec{w}_2 \rangle &= a\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle + b\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle \\ \langle a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2, \vec{w} \rangle &= a\langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle + b\langle \vec{v}_2, \vec{w} \rangle\end{aligned}$$

## 7.2 Calcolo in un riferimento cartesiano

Ricordiamo che assegnare un riferimento cartesiano equivale a fissare un'origine  $O$  e una base ortonormale di  $V_O^2$ , diciamo  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Allora ogni vettore si esprime

$$\vec{v} = \overrightarrow{OP} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

La coppia  $(x, y)$  dà luogo alle coordinate di  $\vec{v}$  nel riferimento scelto, e scriveremo  $\vec{v} = (x, y)$ . Ora, conoscendo le coordinate, possiamo calcolare il prodotto scalare con facilità.

**Proposizione** *Siano  $\vec{v} = (x, y)$  e  $\vec{w} = (x', y')$ . Allora*

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = xx' + yy'.$$

*In particolare,  $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .*

*Dimostrazione.* I prodotti scalari degli elementi della base ortonormale  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  si calcolano facilmente:

$$\begin{cases} \langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle = 1 \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle = 0 \end{cases}$$

Per ipotesi,  $\vec{v} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ ,  $\vec{w} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$ , dunque, utilizzando le proprietà algebriche enunciate in precedenza:

$$\begin{aligned}\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \langle x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 \rangle \\ &= xx'\langle \vec{e}_1, \vec{e}_1 \rangle + xy'\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle + yx'\langle \vec{e}_2, \vec{e}_1 \rangle + yy'\langle \vec{e}_2, \vec{e}_2 \rangle \\ &= xx' + yy'.\end{aligned}$$

$\square$

**Esempio** Calcolare il prodotto scalare tra  $\vec{v} = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$  e  $\vec{w} = -\vec{e}_1 + 5\vec{e}_2$ .

*Soluzione.* Si ha  $\vec{v} = (3, -1)$ ,  $\vec{w} = (-1, 5)$  quindi  $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = -8$ .  $\square$

Ricordiamo che, dato un vettore  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  del piano applicato in un qualunque punto  $A$ , le coordinate di  $\vec{v}$  sono le coordinate del traslato di  $\vec{v}$  nell'origine, diciamo  $\vec{v}_0$ . Poiché la traslazione di due vettori conserva sia i moduli che l'angolo compreso fra di essi, il prodotto scalare fra  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  è uguale al prodotto scalare dei rispettivi vettori traslati  $\vec{v}_0$  e  $\vec{w}_0$ . Dunque abbiamo

**Proposizione** *Siano  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  vettori del piano applicati in un qualunque punto  $A$  del piano, di coordinate rispettive  $(x, y)$  e  $(x', y')$ . Allora:*

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = xx' + yy'.$$

In particolare,  $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Ricordiamo la definizione di prodotto scalare fra due vettori (riga) di  $\mathbf{R}^2$ :

$$\langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy'.$$

Allora si ha

**Proposizione** *Il prodotto scalare di due vettori del piano (applicati in un qualunque punto) uguaglia il prodotto scalare delle rispettive coordinate.*

## 8 Distanze e angoli

### 8.1 Formula della distanza

Se  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  sono due punti del piano, allora la distanza di  $A$  da  $B$  è data dalla formula:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Infatti, la distanza di  $A$  da  $B$  uguaglia il modulo del vettore  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  che ha coordinate

$$B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

e quindi la formula segue dalla proposizione precedente.

**Esempio** Se  $A = (2, -1)$  e  $B = (1, 3)$  allora

$$d(A, B) = \sqrt{(1 - 2)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{17}$$



## 8.2 Angoli

Dalla formula che definisce il prodotto scalare, vediamo subito che il coseno dell'angolo compreso fra i vettori non nulli  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  è dato da:

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$

**Esempio** Calcolare il perimetro e il coseno degli angoli interni del triangolo di vertici  $A = (1, 1)$ ,  $B = (2, 3)$ ,  $C = (3, 0)$ .

*Soluzione.* Dalla formula della distanza otteniamo  $d(A, B) = \sqrt{5} = d(A, C)$  mentre  $d(B, C) = \sqrt{10}$ . Il perimetro vale dunque  $2\sqrt{5} + \sqrt{10}$ . Notiamo che il triangolo è isoscele sulla base  $BC$ . Calcoliamo il coseno dell'angolo in  $A$ , diciamo  $\theta_1$ . Se  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$  allora

$$\cos \theta_1 = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|}$$

Ora  $\vec{v}$  ha coordinate  $B - A = (1, 2)$  mentre  $\vec{w}$  ha coordinate  $C - A = (2, -1)$ . Dunque

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle (1, 2), (2, -1) \rangle = 0.$$

Quindi i due vettori sono ortogonali e l'angolo è  $\theta_1 = \pi/2$ . Il triangolo è allora isoscele rettangolo. È a questo punto evidente che gli altri due angoli sono entrambi uguali a  $\pi/4$ . Verifichiamo calcolando l'angolo al vertice  $B$ . Il suo coseno vale:

$$\cos \theta_2 = \frac{\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle}{\|\overrightarrow{BA}\| \|\overrightarrow{BC}\|}.$$

Ora  $\overrightarrow{BA}$  ha coordinate  $A - B = (-1, -2)$  mentre  $\overrightarrow{BC}$  ha coordinate  $C - B = (1, -3)$ . Quindi

$$\langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \langle (-1, -2), (1, -3) \rangle = 5.$$

D'altra parte  $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{5}$  mentre  $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{10}$ . Dunque:

$$\cos \theta_2 = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

e  $\theta_2 = \pi/4$ .  $\square$

## 9 Perpendicolarità di rette

Consideriamo due rette  $r : ax + by + c = 0, r' : a'x + b'y + c' = 0$ . Vogliamo enunciare una condizione che caratterizzi la perpendicolarità delle due rette. Ora sappiamo che i parametri direttori di  $r$  sono dati dalla coppia  $(b, -a)$ , che rappresenta le coordinate di un vettore parallelo alla retta: precisamente il vettore  $\vec{v} = b\vec{e}_1 - a\vec{e}_2$ . Analogamente, il vettore  $\vec{w} = b'\vec{e}_1 - a'\vec{e}_2$  è parallelo alla retta  $r'$ . Dunque le rette saranno perpendicolari se e solo se i rispettivi vettori direttori sono ortogonali:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0,$$

quindi se e solo se  $0 = \langle (b, -a), (b', -a') \rangle = bb' + aa'$ . Abbiamo dimostrato la seguente:

**Proposizione** *Le rette  $r : ax + by + c = 0, r' : a'x + b'y + c' = 0$  sono perpendicolari se e solo se:*

$$aa' + bb' = 0.$$

**Esempio** Nel piano sono dati la retta  $r : 2x - y + 2 = 0$  e il punto  $P = (2, 0)$ . Determinare l'equazione della retta passante per  $P$  e ortogonale alla retta  $r$ .

*Soluzione.* Scriviamo l'equazione del fascio di rette perpendicolari a  $r$  e imponiamo il passaggio per  $P$ . Si ha che la retta:

$$r' : x + 2y + k = 0$$

è senz'altro ortogonale a  $r$  per ogni  $k$ . Sostituendo le coordinate di  $P = (2, 0)$  nell'equazione otteniamo  $k = -2$ . Dunque la retta cercata ha equazione  $x + 2y - 2 = 0$ .  $\square$

Osserviamo che se  $r : ax + by + c = 0$  allora la coppia  $(a, b)$  rappresenta le coordinate di un vettore perpendicolare alla retta.

### 9.1 Proiezione ortogonale di un punto su una retta

Dato un punto  $P$  e una retta  $r$ , possiamo condurre la retta  $r'$  passante per  $P$  perpendicolare a  $r$ . La retta  $r'$  incontra  $r$  in un punto  $H$ , detto la *proiezione ortogonale* di  $P$  su  $r$ .

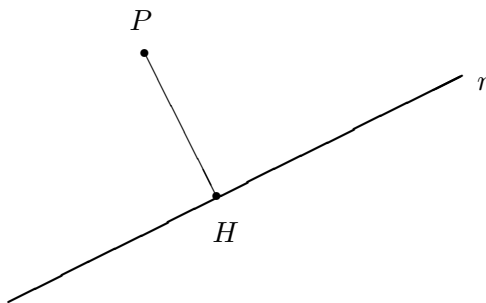


Figura 17: Proiezione ortogonale di un punto su una retta

È evidente che la proiezione ortogonale di  $P$  sulla retta  $r$  è il punto di  $r$  più vicino a  $P$ .

**Esempio** Determinare la proiezione ortogonale di  $P_0 = (2, 0)$  sulla retta  $2x - y + 2 = 0$ .

*Soluzione.* La retta per  $P_0$  ortogonale a  $r$  ha equazione  $x + 2y - 2 = 0$  (vedi esempio precedente). Dunque  $H = r \cap r'$  è dato da  $(-\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$ .  $\square$

## 9.2 Distanza di un punto da una retta

Dato un punto  $P_0$  e una retta  $r$ , la *distanza di  $P$  da  $r$*  è definita come il valore minimo che assume la distanza di  $P_0$  da un punto di  $r$ : tale distanza si indica con il simbolo  $d(P_0, r)$ . Ragionando con un opportuno triangolo retto, si dimostra facilmente che la distanza di  $P_0$  da  $r$  è data dalla distanza di  $P_0$  da  $H$ , dove  $H$  è la proiezione ortogonale di  $P_0$  su  $r$ :

$$d(P_0, r) = d(P_0, H).$$

**Esempio** Calcolare la distanza di  $P_0 = (2, 0)$  dalla retta  $2x - y + 2 = 0$ .

*Soluzione.* La proiezione ortogonale, calcolata nell'esempio precedente, è  $H = (-\frac{2}{5}, \frac{6}{5})$ . Quindi

$$d(P_0, r) = d(P_0, H) = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

$\square$

Esiste una formula esplicita: se  $P_0 = (x_0, y_0)$  e  $r : ax + by + c = 0$  allora:

$$d(P_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

detta *formula della distanza di un punto da una retta*. Ne omettiamo la dimostrazione.

### 9.3 Punto medio e asse di un segmento

Dati due punti  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  il punto medio del segmento  $AB$  è il punto di coordinate

$$M = \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

Si definisce *asse* del segmento  $AB$  l'insieme dei punti del piano equidistanti da  $A$  e  $B$ . Si osserva che l'asse del segmento  $AB$  è la retta  $r$  ortogonale al segmento  $AB$ , passante per il punto medio  $M$  di  $AB$ .

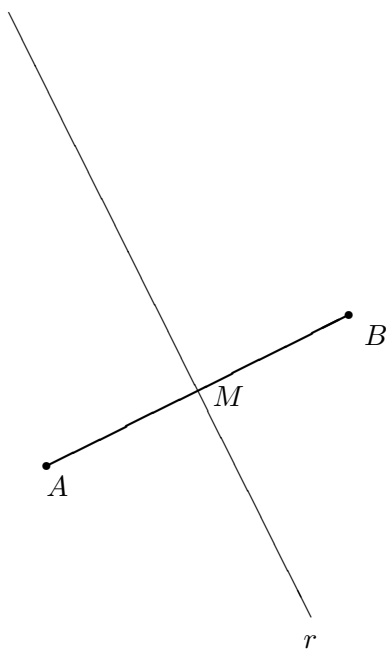


Figura 18: Asse del segmento  $AB$

Si dirà anche che  $B$  è il *simmetrico di A rispetto alla retta r*.

**Esempio** Trovare l'equazione dell'asse del segmento  $AB$ , dove  $A = (-1, 3)$ ,  $B = (3, 5)$ .

*Soluzione.* Il punto medio di  $AB$  ha coordinate  $M = (1, 4)$ . La retta generica perpendicolare al segmento  $AB$  ha equazione

$$r : 2x + y + k = 0,$$

dove  $k \in \mathbf{R}$  (spiegare perché). Imponendo il passaggio per il punto  $M$ , otteniamo  $k = 6$  e l'equazione dell'asse di  $AB$  è

$$r : 2x + y - 6 = 0.$$

□

## 9.4 Metodo del punto mobile

**Esempio** Nel piano sono dati la retta  $r : 2x - y + 2 = 0$ , il suo punto  $A = (-1, 0)$  e il punto  $Q = (1, 1)$ .

a) Determinare tutti i punti  $P$  sulla retta  $r$  tali che il triangolo di vertici  $A, P, Q$  abbia area 1.

b) Determinare tutti i punti  $P'$  sulla retta  $r$  tali che il triangolo di vertici  $A, P', Q$  sia isoscele sulla base  $AP'$ .

*Soluzione.* Equazioni parametriche di  $r$ :

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t + 2 \end{cases}$$

Il punto generico (o punto *mobile*) su  $r$  ha dunque coordinate  $P = (t, 2t + 2)$ .

a) L'area del triangolo di vertici  $A, P, Q$  vale  $\frac{1}{2}d(A, P)d(Q, r)$ . Ora:

$$d(A, P) = \sqrt{(t+1)^2 + (2t+2)^2} = \sqrt{5(t+1)^2},$$

mentre la distanza di  $Q$  da  $r$  vale:

$$d(Q, r) = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Dunque dobbiamo avere

$$\frac{1}{2}\sqrt{5(t+1)^2} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}} = 1,$$

e, risolvendo otteniamo due valori di  $t$ , dati da  $t = -\frac{1}{3}$  e  $t = -\frac{5}{3}$ . I punti cercati sono dunque:

$$P_1 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right), \quad P_2 = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

b) Dobbiamo imporre la seguente condizione al punto  $P' = (t, 2t + 2)$ :

$$d(P', Q) = d(A, Q) = \sqrt{5},$$

che si traduce nell'equazione:

$$5t^2 + 2t - 3 = 0.$$

Tale equazione ammette le soluzioni  $t = -1, t = \frac{3}{5}$ . Il primo valore dà luogo al punto  $(-1, 0)$  (il punto  $A$ ) che dobbiamo scartare. Il secondo valore dà luogo al punto

$$P' = \left(\frac{3}{5}, \frac{16}{5}\right),$$

che è l'unica soluzione del problema.  $\square$