Esercizi I : curve piane

0.1 Esercizio

Si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

a) Stabilire per quali valori di t la parametrizzazione è regolare.

b) Sia Γ la traccia di α. Descrivere Γ con un'equazione in x e y (eliminare il parametro t).

c) Parametrizzare, se possibile, la traccia di α in modo regolare.

Soluzione. a) *Si ha:*

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}$$

dunque

$$|\alpha'(t)|^2 = \cos^2 t(1 + 16\sin^2 t)$$

e α è regolare se e solo se $t \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

b) *Si ha*

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos(2t) = 1 - 2\sin^2 t \end{cases}$$

eliminando t si ha che la traccia è contenuta nel grafico della funzione $y = 1 - 2x^2$, che rappresenta la parabola di vertice $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ che incontra l'asse x nei punti $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Dalla definizione si vede che α è l'arco di tale parabola che unisce i punti $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

c) *Siccome Γ è un grafico:*

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - 2t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1].$$

0.2 Esercizio

Studiare la curva (spirale logaritmica)

$$\alpha : \begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

determinando la curvatura e la lunghezza dell'arco corrispondente all'intervallo $[0, 2\pi]$.

Soluzione. Abbiamo

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ e^t \sin t \end{pmatrix}, \quad \alpha'(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

dunque:

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{2}e^t$$

e la curva è regolare ovunque. L'ascissa curvilinea, con origine in $t = 0$, è

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(u)|\, du = \sqrt{2}(e^t - 1).$$

Ora

$$\alpha''(t) = e^t \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

dunque

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = e^{2t} \det \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & -2\sin t \\ \sin t + \cos t & 2\cos t \end{pmatrix} = 2e^{2t}$$

da cui otteniamo

$$k(t) = \frac{1}{\sqrt{2}e^t}.$$

0.3 Esercizio

Studiare la regolarita' della curva :

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin(2t) \end{pmatrix}, \, t \in [0, 2\pi]$$

a) Descrivere la traccia Γ con un equazione cartesiana.

b) Determinare i valori di t per i quali il versore tangente è parallelo all'asse x. Dopo aver osservato che la traccia è contenuta in un quadrato di lato unitario, determinare i punti in cui la traccia di α è tangente ai lati di tale quadrato.

c) Determinare i valori di t per i quali $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. In ciascuno di essi, determinare il versore tangente e il versore normale di α.

Soluzione. a) *Eliminando il parametro otteniamo*

$$4x^4 - 4x^2 + y^2 = 0.$$

0.4 Esercizio

Sia Γ il ramo dell'iperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0,$$

che giace nel semipiano $x > 0$. Dopo aver parametrizzato Γ in modo regolare, determinare il valore massimo e minimo della sua curvatura, e gli eventuali punti dove tali estremi sono raggiunti (per il segno, si assuma che la curva sia percorsa nel verso delle y crescenti).

Soluzione. Parametrizzazione

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cosh t \\ b\sinh t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Si ha

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} a\sinh t \\ b\cosh t \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cosh t \\ b\sinh t \end{pmatrix}$$

Inoltre

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2\sinh^2 t + b^2\cosh^2 t}, \quad \det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = -ab.$$

Dunque

$$k(t) = -\frac{ab}{(a^2\sinh^2 t + b^2\cosh^2 t)^{3/2}}.$$

Ora $k(t)$ è sempre negativa, ed è chiaro che $k(t) \to 0$ quando $t \to \pm\infty$. Siccome $\cosh^2 t = 1 + \sinh^2 t$ *abbiamo che*

$$a^2\sinh^2 t + b^2\cosh^2 t = b^2 + (a^2+b^2)\sinh^2 t \geq b^2$$

e l'uguaglianza vale se e solo se $t = 0$. Dunque

$$|k(t)| \leq \frac{a}{b^2}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $t = 0$, ovvero solo nel punto (vertice) $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$. In conclusione, il minimo della curvatura è raggiunto per $t = 0$, e vale $-\frac{a}{b^2}$. Il massimo non è mai raggiunto, ma l'estremo superiore dei valori della curvatura è zero.

0.5 Esercizio

Ripetere l'esercizio precedente per l'ellisse in forma canonica $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, percorsa in senso antiorario (si assuma $a \geq b > 0$).

Soluzione. Parametrizzazione

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Risulta, con facili calcoli

$$k(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

Osserviamo che

$$a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t = (a^2 - b^2) \sin^2 t + b^2$$

e che tale espressione assume valore minimo b^2 *quando* $t = 0, \pi$ *e assume valore massimo* a^2 *quando* $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. *Poiche' il numeratore dell'espressione di* $k(t)$ *è costante, avremo che il valore massimo* $k_{\max}$ *della curvatura sara'*

$$k_{max} = \frac{a}{b^2}$$

raggiunto quando $t = 0, \pi$, *e il valore minimo* k_{min} *sara' dato da*

$$k_{min} = \frac{b}{a^2}$$

raggiunto in corrispondenza dei valori $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

0.6 Esercizio

Ripetere l'esercizio precedente per la parabola in forma canonica $y^2 = 2px$, percorsa nel verso delle y crescenti (si assuma $p > 0$).

0.7 Esercizio

Supponiamo noto che $\alpha : [0, \infty) \to \mathbf{R}^2$ sia una curva piana, parametrizzata dall'ascissa curvilinea, tale che:

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare l'equazione cartesiana della traccia di α, supponendo che la curvatura sia costante, pari a 2, per ogni valore di s.

b) Determinare l'equazione cartesiana se, invece, la curvatura vale -2 per ogni valore di s.

0.8 Esercizio

Si consideri il polinomio:

$$f(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 4x - 4y.$$

a) Per quali valori di c l'insieme di livello $f(x, y) = c$ è una curva regolare ?

b) Dopo aver verificato che l'equazione $f(x, y) = 0$ definisce una curva regolare Γ, determinare l'equazione della retta tangente a Γ nel suo punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

0.9 Esercizio

Si studi la curva data dal grafico $y = \cosh x$; in particolare, calcolare la lunghezza dell'arco di curva corrispondente all'intervallo $x \in [-1, 1]$, e calcolarne la curvatura.

Soluzione. Consideriamo, piu' in generale, la parametrizzazione:

$$\begin{cases} x = t \\ y = a\cosh(\dfrac{t}{a}) \end{cases}$$

ovvero

$$\alpha(t) = (t, a\cosh(\frac{t}{a}))$$

Dunque

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh(\frac{t}{a}) \end{pmatrix}, \ \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a}\cosh(\frac{t}{a}) \end{pmatrix}.$$

Si ha:

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + \sinh^2(\frac{t}{a})} = \cosh(\frac{t}{a}).$$

Curvatura

$$k(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3} = \frac{1}{a\cosh^2(\frac{t}{a})}.$$

Ascissa curvilinea (contata da $t = 0$):

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(u)|\, du = \int_0^t \cosh(\frac{u}{a})\, du = a\sinh(\frac{t}{a}).$$

La funzione $s : [0, \infty) \to \mathbf{R}$ è crescente, dunque ammette inversa $\psi = s^{-1}$ e escriveremo in breve $t = t(s)$. Poiché, se $x > 0$ e $y = \sinh x$ allora $x = \log(y + \sqrt{1 + y^2})$ otteniamo

$$t = t(s) = a\log\Big(\frac{s + \sqrt{a^2 + s^2}}{a}\Big).$$

Dunque la riparametrizzazione con l'ascissa curvilinea con origine nel punto $(a, 0)$, nella direzione delle x crescenti, si ottiene da

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(t(s)).$$

0.10 Esercizio

Si consideri la curva Γ, grafico della funzione $y = f(x)$ sull'intervallo $[a, b]$. Determinare formule per le seguenti funzioni :

a) Lunghezza $L(x)$ della parte di grafico di f sull'intervallo $[a, x]$, con $x \leq b$.

b) Curvatura $k(x)$ di Γ nel suo punto $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, assumendo che Γ sia percorsa nel verso delle x crescenti.

c) Supponiamo ora che la funzione $k(x)$ sia tale che

$$k(x) = \frac{2}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Che tipo di curva è Γ ?

Soluzione. Parametrizziamo nel modo standard:

$$\alpha(t) : \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b].$$

Dunque

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ f''(t) \end{pmatrix}, \quad |\alpha'(t)| = (1 + f'(t)^2)^{\frac{1}{2}}.$$

a) *L'ascissa curvilinea con origine in $t = a$ è*

$$s(t) = \int_a^t (1 + f'(u)^2)^{\frac{1}{2}}\, du.$$

Poichè $t = x$ si vede subito che

$$L(x) = \int_a^x (1 + f'(u)^2)^{\frac{1}{2}}\, du.$$

b) *Ora la curvatura è*

$$k(t) = \frac{f''(t)}{(1 + f'(t)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e siccome $t = x$:

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

c) *La condizione imposta implica che $f''(x) = 2$. Integrando due volte otteniamo che $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ e quindi il grafico è un arco di parabola.*

0.11 Esercizio

Si consideri la curva Γ, grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x}\cos(x^2)$ sull'intervallo $(0, \infty)$. Si noti che Γ è contenuta nella striscia di piano compresa tra le curve $y = \frac{1}{x}$ e $y = -\frac{1}{x}$; in particolare, quando $x \to \infty$ la curva Γ "tende" asintoticamente all'asse x. Dimostrare che, pero', la curvatura di Γ non tende a zero, determinando esplicitamente una successione di punti $\{x_n\}$ tale che:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} |k(x_n)| = +\infty,$$

dove $k(x)$ indica la curvatura di Γ nel suo punto $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$.

Soluzione. Ricordiamo che si ha la formula

$$k(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

da cui otteniamo

$$|k(x)| = \frac{|f''(x)|}{|1 + f'(x)^2|^{\frac{3}{2}}}.$$

Ora

$$\begin{cases} f'(x) = -2\sin(x^2) - \dfrac{\cos(x^2)}{x^2} \\ f''(x) = -4x\cos(x^2) + \dfrac{2}{x}\sin(x^2) + \dfrac{2}{x^3}\cos(x^2) \end{cases}$$

Si ponga

$$x_n = \sqrt{2\pi n}, \quad \textit{cosicché} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Si ha: $\sin(x_n^2) = 0$, $\cos(x_n^2) = 1$, *quindi*

$$f'(x_n) = -\frac{1}{2\pi n} \to 0, \quad f''(x_n) = -4x_n + \frac{2}{x_n^3} \to -\infty$$

Ne segue che $\lim_{n\to\infty} |k(x_n)| = +\infty$.

0.12 Esercizio

Ricordiamo che, data una curva parametrizzata $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^2$, e dato un diffeomorfismo $\phi : [c, d] \to [a, b]$, la curva $\beta = \alpha \circ \phi : [c, d] \to \mathbf{R}^2$ è detta una *riparametrizzazione di* α, che sarà detta *diretta* se conserva il verso di percorrenza (cioè $\phi'(t) > 0$ per ogni t), e *inversa* se lo inverte (cioè $\phi'(t) < 0$ per ogni t).
Con k_α indicheremo la curvatura di α, quindi:

$$k_\alpha(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{|\alpha'(t)|^3}.$$

Dimostrare che, se $\beta = \alpha \circ \phi$ è una riparametrizzazione diretta di α, allora:

$$k_\beta(t) = k_\alpha(\phi(t)), \quad \text{per ogni } t \in [c, d].$$

Se la riparametrizzazione è inversa si avra' ovviamente

$$k_\beta(t) = -k_\alpha(\phi(t)), \quad \text{per ogni } t \in [c, d].$$

0.13 Esercizio.

Determinare l'unica curva $\alpha : (0, \infty) \to \mathbf{R}^2$ tale che

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_\alpha(s) = \frac{1}{2\sqrt{s}}.$$

Soluzione. Abbiamo

$$\theta(s) = \int_0^s k(u)\, du = \int_0^s \frac{1}{2\sqrt{u}}\, du = \sqrt{s}.$$

Dunque

$$\begin{cases} x(s) = \displaystyle\int_0^s \cos\sqrt{u}\, du \\ y(s) = \displaystyle\int_0^s \sin\sqrt{u}\, du \end{cases}$$

Ora, con la sostituzione $\sqrt{u} = t$ *vediamo che* $\dfrac{1}{2\sqrt{u}} du = dt$ *quindi*

$$du = 2tdt,$$

Ne segue che

$$\int_0^s \cos\sqrt{u}\, du = 2\int_0^{\sqrt{s}} t\cos t\, dt$$

Integrando per parti otteniamo

$$\int_0^s \cos\sqrt{u}\, du = 2\sqrt{s}\sin\sqrt{s} + 2\cos\sqrt{s} - 2$$

Analogamente

$$\int_0^s \sin\sqrt{u}\, du = -2\sqrt{s}\cos\sqrt{s} + 2\sin\sqrt{s}.$$

In conclusione la curva è

$$\alpha(s) = 2\begin{pmatrix} \sqrt{s}\sin\sqrt{s} + \cos\sqrt{s} - 1 \\ -\sqrt{s}\cos\sqrt{s} + \sin\sqrt{s} \end{pmatrix}, \quad s \in (0, \infty).$$

0.14 Esercizio.

Studiare la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t\sin t + \cos t \\ -t\cos t + \sin t \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

Determinare la lunghezza dell'arco corrispondente all'intervallo $(2\pi, 4\pi)$, la funzione ascissa curvilinea e la curvatura.

Soluzione. La curva è una spirale.

0.15 Esercizio

Dati numeri reali a, b, c, a', b', c' si consideri la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a + bt + ct^2 \\ a' + b't + c't^2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

Esistono valori dei parametri per i quali la traccia di α è una retta ?

0.16 Esercizio

Dare un'idea della traccia dell'unica curva $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ tale che:

$$\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k_\alpha(s) = 2s \quad \text{per ogni} \quad s \in \mathbf{R}.$$

Se $\alpha(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ determinare i seguenti limiti:

$$\lim_{s \to +\infty} x(s), \lim_{s \to +\infty} y(s).$$

Soluzione. Dalla dimostrazione del teorema di rigidità otteniamo $\theta(s) = s^2$; considerati i dati iniziali,

$$\begin{cases} x(s) = \displaystyle\int_0^s \cos(u^2)\, du \\ y(s) = \displaystyle\int_0^s \sin(u^2)\, du \end{cases}$$

ne segue che (consultare le tavole degli integrali):

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{s \to +\infty} x(s) = \int_0^\infty \cos(u^2)\, du = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \\ \displaystyle\lim_{s \to +\infty} y(s) = \int_0^\infty \sin(u^2)\, du = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \end{cases}.$$

La traccia è un'elica che si avvolge intorno al punto $(\sqrt{\frac{\pi}{8}}, \sqrt{\frac{\pi}{8}})$ tendendo a tale punto senza mai raggiungerlo.

0.17 Esercizio

Sia $\alpha(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ una curva parametrizzata dall'ascissa curvilinea. Si fissi un vettore $v \in \mathbf{R}^2$ e si consideri l'angolo $\theta(s)$ tra il versore tangente $T(s)$ e v. Dimostrare che

$$\theta'(s) = k(s).$$

Soluzione. *Abbiamo per definizione:*

$$\cos\theta(s) = \langle T(s), v\rangle$$

dunque, derivando:

$$-\sin\theta(s)\cdot\theta'(s) = \langle T'(s), v\rangle.$$

Ora $T'(s) = k(s)N(s)$ *e dunque*

$$-\sin\theta(s)\cdot\theta'(s) = k(s)\langle N(s), v\rangle = k(s)\cos\phi(s)$$

dove $\phi(s)$ *è l'angolo tra* v *e* $N(s)$*, che è uguale a* $\theta(s) + \frac{\pi}{2}$*. Dunque* $\cos\phi(s) = -\sin\theta(s)$ *e sostituendo otteniamo l'asserto.*

0.18 Esercizio

Interpretare geometricamente le seguenti matrici ortogonali.

a) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Soluzione. a) *Prima matrice: rotazione di angolo* θ *intorno al vettore* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *con la data orientazione. Seconda matrice : rotazione intorno intorno al vettore* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) *Prima matrice : ribaltamento rispetto al piano* $z = 0$*, seconda matrice: ribaltamento rispetto al piano* $x = 0$ *(piano* yz*).*

c) *Prima matrice : ribaltamento intorno all'asse* z*. Seconda: ribaltamento rispetto all'asse* y*. Terza: simmetria rispetto all'origine.*

0.19 Esercizio

Si consideri la curva piana:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

a) Trovare i punti dove la parametrizzazione è regolare, e determinare l'equazione della retta tangente in $t = \pi/4$.

b) Calcolare la lunghezza dell'arco da $t = 0$ a $t = 2\pi$.

c) Determinare il versore tangente $T(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|}\alpha'(t)$, ove esiste, e calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{t\to 0_+} T(t), \quad \lim_{t\to 0_-} T(t).$$

d) Determinare la curvatura $k(t)$ nei punti regolari, e calcolare $\lim_{t\to 0_+} k(t)$.

0.20 Esercizio

È data la curva in coordinate polari:

$$r = a + \cos\theta, \quad a \geq 1$$

parametrizzata, come al solito, dall'angolo θ:

$$\alpha(\theta) = \begin{pmatrix} r(\theta)\cos\theta \\ r(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

a) Stabilire per quali valori di a la curva α è regolare.

b) Dopo aver verificato che α è chiusa, determinare la sua lunghezza quando $a = 1$.

c) Determinare la curvatura nel punto $\alpha(\theta)$ per ogni θ; stabilire per quali valori di a la curvatura non cambia di segno (cioè, è sempre positiva, o sempre negativa).

0.21 Esercizio

a) Data la curva piana $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ definita da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t)\cos t \\ \sin(2t)\sin t \end{pmatrix}$, stabilire i valori di t per i quali α è regolare; per tali valori, determinare la curvatura di α.

b) È vero che α è iniettiva ? Disegnare la traccia di α.

c) Calcolare $r(t)$, la distanza di $\alpha(t)$ dall'origine.

0.22 Esercizio

Data la curva $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^2$, parametrizzata dall'ascissa curvilinea, e dato un numero $r > 0$, si consideri la curva $\beta_r : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ definita da:

$$\beta_r(s) = \alpha(s) + rN(s),$$

dove $N(s) = J\alpha'(s)$ è il versore normale di α.

a) Per quali valori di r la curva β_r è regolare in s ?

b) Per tali valori, calcolare la curvatura di β_r.

c) Se α parametrizza la circonferenza di raggio R, qual è la traccia di β_r ?

d) In generale, qual è la traccia di β_r ?

0.23 Esercizio

Sia $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ una curva regolare del piano parametrizzata dall'ascissa curvilinea, e sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un'isometria diretta del piano. Sia $\beta : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ la curva ottenuta componendo α con f, ovvero la curva definita da $\beta(s) = f(\alpha(s))$ per ogni $s \in [0, L]$. Se $k_\alpha(s), k_\beta(s)$ sono, rispettivamente, la curvatura di α in s e la curvatura di β in s, dimostrare che si ha $k_\alpha(s) = k_\beta(s)$ per ogni s.

0.24 Esercizio

a) Si consideri la curva $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ definita da $\alpha(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$. Dato $b > 0$, calcolarne la lunghezza L_b nell'intervallo $t \in [0, b]$ e stabilire se $\lim_{b\to\infty} L_b$ esiste oppure no.

Soluzione. Si ha

$$L_b = \sqrt{2}(1 - e^{-b})$$

quindi $\lim_{b\to\infty} L_b = \sqrt{2}$.

b) Si consideri la curva piana $\alpha(t) = (3 - \cos t, 2 + 2\sin t)$ nell'intervallo $t \in [0, 2\pi]$. Calcolare la curvatura $k(t)$ in funzione del parametro t, e determinare i punti dove essa assume valore assoluto massimo (risp. minimo).

Soluzione. Si ha

$$k(t) = -\frac{2}{(\sin^2 t + 4\cos^2 t)^{3/2}}$$

il cui modulo assume valore minimo $-1/4$ *per* $t = 0, \pi$ *e valore massimo* 2 *per* $t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.