

Esame I appello 2011/12

Prova scritta di Geometria (Prof. A. Savo) 23/01/2012

L'esame consiste di sei esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Non saranno accettati fogli di brutta copia.

Esercizio 1 a) Calcolare il rango della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ al variare del parametro k .

b) Discutere le soluzioni del sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + kz = 2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ al variare del parametro k .

Esercizio 2 Siano v_1, v_2, v_3, w_1, w_2 vettori non nulli di \mathbf{R}^4 , e si ponga $E = L[v_1, v_2, v_3]$, $F = L[w_1, w_2]$.

a) Dimostrare che, se $E \subseteq F$, allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti. Se $E \subseteq F$, quali valori può assumere $\dim E$?

b) Supponiamo ora che (v_1, v_2, v_3) sia una base di E e (w_1, w_2) sia una base di F . Determinare: $\dim E^\perp$, $\dim F$ e stabilire se $\mathbf{R}^4 = E^\perp + F$.

Esercizio 3 Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, sia E il sottospazio di \mathbf{R}^4 generato da v_1, v_2

e F il sottospazio di equazione $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

a) Calcolare la dimensione di F , e la dimensione di E al variare di k .

b) Per quali valori di k il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ appartiene a E ?

- c) Per quali valori di k si ha $E \subseteq F$?
- d) Quali valori può assumere $\dim(E \cap F)$?

Esercizio 4 Nel piano sono dati i punti $O = (0, 0)$, $A = (2, 4)$.

- a) Determinare le equazioni delle circonferenze di raggio 5 passanti per O e A .
- b) Determinare l'equazione della circonferenza γ di raggio minimo passante per O e A .
- c) Determinare i punti P sulla circonferenza γ trovata al punto b), tali che il triangolo di vertici O, A, P abbia area massima.

Esercizio 5 Nello spazio sono dati: il punto $A = (1, 2, 0)$ e la retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - t \end{cases}. \text{ Determinare:}$$

- a) L'equazione del piano π contenente A e r .
- b) L'equazione del piano π' passante per A e ortogonale a r .
- c) L'equazione del piano π'' parallelo a r e contenente l'origine e il punto A .
- d) Determinare infine un punto P sulla retta r tale che il triangolo di vertici O, A, P sia rettangolo in O .

Esercizio 6 Sia f l'unico endomorfismo di \mathbf{R}^3 tale che:

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 - e_2 \\ f(e_2) = e_1 - e_2 \\ f(e_3) = 2e_1 - 2e_2 \end{cases}$$

dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di \mathbf{R}^3 .

- a) Determinare il polinomio caratteristico di f .
- b) Stabilire se f è diagonalizzabile oppure no.
- c) Determinare gli eventuali valori di k per i quali il vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ k \\ k+2 \end{pmatrix}$ appartiene all'immagine di f .