Esame 2

Esame di Geometria (Prof. A. Savo) 16/02/2012

Esercizio 1 Sono dati i vettori v_1, v_2, w_1, w_2 di $\mathbf{R}^6$, che supporremo linearmente indipendenti, e si ponga $E = L[v_1, v_2], F = L[w_1, w_2]$.

a) Dimostrare che $E \cap F = \{O\}$.

b) Quali valori può assumere la dimensione del sottospazio $(E + F)^{\perp}$?

Esercizio 2 In $\mathbf{R}^4$ è dato il sottospazio E generato dai vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

a) Determinare una base ortonormale di E.

b) Determinare una base di $E^{\perp}$.

c) Determinare equazioni cartesiane di E.

Esercizio 3 Sia $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare tale che: $\begin{cases} F(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ F(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ F(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ dove (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbf{R}^3$. Determinare:

a) Una base di $\mathrm{Ker}F$.

b) Un vettore $v \in \mathbf{R}^3$, ortogonale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e tale che $F(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) Sia ora $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ un'applicazione lineare suriettiva. Dimostrare che $n \geq m$.

Esercizio 4 a) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determinare una matrice ortogonale M e una matrice diagonale D tali che $D = M^t AM$.

b) Classificare la conica $\gamma : x^2 + y^2 + 4xy + 6x + 1 = 0$ determinandone una forma canonica.

c) Determinare le coordinate del centro e le equazioni degli assi di simmetria di γ.

Esercizio 5 Nello spazio sono dati la retta $r : \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - z + 2 = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi : x + 2y - z = 0$.

Determinare:

a) Il punto d'intersezione tra r e π.

b) Equazioni cartesiane della retta r_1, proiezione ortogonale di r su π.

c) Equazioni cartesiane della retta r_2, contenuta in π, perpendicolare e incidente alla retta r.

d) L'equazione della sfera tangente al piano π e avente centro nel punto $C = (0, 3, 0)$.

Esercizio 6 È data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & k \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro k, e il vettore $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Determinare i valori di k per i quali:

a) Il sistema lineare $AX = v$ è compatibile.

b) La matrice A è diagonalizzabile.

c) La matrice AA^t è diagonalizzabile.