Geometria Differenziale 2017/18
Esercizi 3

1 Superfici I

1.1 Esercizio

a) Verificare che l'ellissoide
$$\Sigma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$
è una superficie regolare in tutti i suoi punti.
b) Dare una parametrizzazione di Σ; calcolare il versore normale e la mappa di Gauss. È vero che la mappa di Gauss è suriettiva ?
c) Determinare l'equazione del piano tangente affine dell'ellissoide $\Sigma : \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} + \dfrac{z^2}{4} = 1$ nel punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
d) Trovare i punti dell'ellissoide di cui alla parte c), in cui il piano tangente affine è parallelo al piano $x + y - z = 0$.

Soluzione. a) *Per verificare la regolarità, useremo il fatto che l'ellissoide è una superficie di livello della funzione*
$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2},$$
precisamente $F(x, y, z) = 1$. *Vediamo se ci sono punti critici di* F *su* Σ. *Si ha:*
$$\nabla F = (\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2})^t$$
che si annulla solo per $x = y = z = 0$*; tale punto, pero', non appartiene a* Σ*, dunque non ci sono punti critici su* Σ*, e* Σ *è regolare ovunque.*
b) *Parametrizzazione*
$$f(u, v) = \begin{pmatrix} a \cos v \cos u \\ b \cos v \sin u \\ c \sin v \end{pmatrix}, \quad u \in (0, 2\pi), v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Otteniamo

$$f_u = \begin{pmatrix} -a\cos v \sin u \\ b\cos v \cos u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_v = \begin{pmatrix} -a\sin v \cos u \\ b\sin v \sin u \\ c\cos v \end{pmatrix}$$

dunque, calcolando $f_u \wedge f_v$*, e normalizzando tale vettore, otteniamo*

$$N(u,v) = \frac{1}{\lambda(u,v)} \begin{pmatrix} bc\cos v \cos u \\ ac\cos v \sin u \\ ab\sin v \end{pmatrix},$$

dove $\lambda(u,v)$ *è il modulo del vettore* $\begin{pmatrix} bc\cos v \cos u \\ ac\cos v \sin u \\ ab\sin v \end{pmatrix}$. *Ora, dire che la mappa di Gauss è suriettiva equivale a dire che, data comunque una direzione (ovvero, dato un versore* ν *dello spazio), esiste sempre un punto* $p \in \Sigma$ *in cui* $N(p) = \nu$*. Nel caso dell'ellissoide, questo è geometricamente evidente; comunque per dimostrare la suriettivita' usiamo il fatto che* $\nabla F(x,y,z)$ *è sempre un vettore ortogonale alla superficie in* (x,y,z)*; dunque una seconda espressione della mappa di Gauss è data da:*

$$N(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} \begin{pmatrix} x/a^2 \\ y/b^2 \\ z/c^2 \end{pmatrix}.$$

Dato $\nu \in \mathbf{S}^2$*, ovvero un vettore di modulo unitario:*

$$\nu = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix},$$

si vede che

$$\nu = N(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$$

dove $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \Sigma$ *è tale che*

$$\bar{x} = \frac{\alpha a^2}{\mu}, \quad \bar{y} = \frac{\beta b^2}{\mu}, \quad \bar{z} = \frac{\gamma c^2}{\mu},$$

e $\mu = \sqrt{\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2}$.

c) *Ricordiamo che il piano tangente affine in* (x_0, y_0, z_0) *alla superficie* $F(x,y,z) = c$ *ha equazione*

$$\nu_1(x - x_0) + \nu_2(y - y_0) + \nu_3(z - z_0) = 0,$$

dove $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$*. Nel nostro caso*

$$\nabla F = (x, 2y, z/2).$$

quindi, nel punto $(-1, 0, \sqrt{2})$ *abbiamo* $\nabla F = (-1, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ *e l'equazione sara':* $-(x+1) + \frac{\sqrt{2}}{2}(z - \sqrt{2}) = 0$*, ovvero*

$$2x - \sqrt{2}z + 4 = 0.$$

d) *Vogliamo trovare i punti* $(x, y, z) \in \Sigma$ *tali che* $\nabla F(x, y, z)$ *sia parallelo al vettore normale del piano in questione, cioè il vettore* $\nu = (1, 1, -1)$. *Dunque dobbiamo imporre*

$$(x, 2y, z/2) = \lambda(1, 1, -1).$$

Determineremo poi λ *in modo che il punto appartenga a* Σ. *Otteniamo due punti:*

$$\pm(\frac{2}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, -\frac{4}{\sqrt{7}}).$$

1.2 Esercizio

a) Scrivere la forma canonica delle restanti quadriche generali: iperboloide a una falda, iperboloide a due falde, paraboloide ellittico, paraboloide iperbolico.
b) In ciascun caso, dare una parametrizzazione, verificare la regolarità e determinare il versore normale e la mappa di Gauss.

1.3 Esercizio

a) Calcolare il versore normale dell'iperboloide a due falde:

$$x^2 + y^2 - z^2 = -1,$$

e determinare l'immagine della mappa di Gauss, ristretta alla componente dove $z \geq 1$.
b) Stessa domanda per l'iperboloide a una falda $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1.4 Esercizio

Le superfici parametrizzate Σ_1, Σ_2 definite da:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x = v \cos u \\ y = v \sin u \\ z = 1 + v^2 \end{cases}, \quad \Sigma_2 : \begin{cases} x = (1 + v^2) \cos u \\ y = (1 + v^2) \sin u \\ z = v \end{cases} \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2,$$

sono superfici di rotazione intorno all'asse z di due curve $\alpha_1(v), \alpha_2(v)$ contenute nel piano xz.
a) Individuare α_1, α_2 e disegnare Σ_1, Σ_2.
b) Eliminare i parametri u, v per ottenere equazioni cartesiane di Σ_1 e Σ_2. Quale di queste è una quadrica ?
c) Calcolare l'area della porzione di superficie Σ_1 ottenuta ruotando l'arco di curva $\alpha_1(v)$ corrispondente all'intervallo $v \in [0, 1]$.

1.5 Esercizio

Si consideri la superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \det \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ x & 1 & z \\ y & z & 1 \end{pmatrix} = 0\}.$$

a) Esistono quattro punti p_1, p_2, p_3, p_4 tale che $\Sigma \setminus \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ è regolare. Determinare tali punti.

Soluzione. L'equazione di Σ *è* $G(x, y, x) = 0$ *dove*

$$G(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz.$$

Sappiamo che Σ *può essere singolare solo nei punti critici di* G *che appartengono a* Σ*. Ora si ha*

$$\nabla G(x, y, z) = 2 \begin{pmatrix} yz - x \\ xz - y \\ xy - z \end{pmatrix}$$

dunque i punti di S *vanno ricercati tra le soluzioni del sistema:*

$$\begin{cases} yz - x = 0 \\ xz - y = 0 \\ xy - z = 0 \\ 1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2xyz = 0 \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per x*, la seconda per* y*, la terza per* z *e sommiamo, ottenendo*

$$3xyz = x^2 + y^2 + z^2,$$

che, insieme alla quarta equazione sopra, dà:

$$xyz = 1.$$

Poiché $xyz = x^2$ *dalla prima equazione, otteniamo* $x^2 = 1$*. Per simmetria, si ha poi* $y^2 = 1$ *e* $z^2 = 1$*, vale a dire:*

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \\ z^2 = 1 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

e le uniche soluzioni sono date dai punti

$$p_1 = (1, 1, 1),\ p_2 = (-1, -1, 1),\ p_3 = (-1, 1, -1),\ p_4 = (1, -1, -1)$$

che descrivono l'insieme cercato.

1.6 Esercizio

Nel piano xz, è dato l'arco di curva α definito dal seguente grafico:

$$x = \cosh z, \quad z \in (-\infty, \infty).$$

a) Parametrizzare α, quindi parametrizzare la superficie Σ (detta *catenoide*) ottenuta ruotando la curva α intorno all'asse z. Calcolare la prima forma fondamentale.

b) Determinare il versore normale $N = N(\theta, t)$ di Σ in un suo punto arbitrario e calcolare $\lim_{t \to \pm\infty} N(\theta, t)$.

c) Calcolare l'area $A(b)$ della porzione di superficie corrispondente alla striscia $|z| \leq b$, con $b > 0$.

d) Se $A(b)$ è l'area di cui alla parte c), determinare il comportamento asintotico di $A(b)$ quando $b \to +\infty$.

e) Scrivere un'equazione cartesiana di Σ.

Soluzione. a) *Risulta*

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

dunque una parametrizzazione di Σ *è*

$$f(\theta, t) = \begin{pmatrix} \cosh t \cos \theta \\ \cosh t \sin \theta \\ t \end{pmatrix}, \quad (\theta, t) \in [0, 2\pi] \times \mathbf{R}.$$

La prima forma fondamentale:

$$g = \begin{pmatrix} \cosh^2 t & 0 \\ 0 & \cosh^2 t \end{pmatrix}, \quad \textit{dunque} \quad \sqrt{\det g} = \cosh^2 t.$$

b) *Un calcolo mostra che*

$$N(\theta, t) = \frac{1}{\cosh t} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ -\sinh t \end{pmatrix},$$

e si vede che

$$\lim_{t \to +\infty} N(\theta, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lim_{t \to -\infty} N(\theta, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

c) *Poichè* $\sqrt{\det g} = \cosh t$ *si ha:*

$$A(b) = 2\pi \int_{-b}^{b} \cosh^2 t \, dt$$

Dalla formula

$$\cosh^2 t = \frac{1+\cosh(2t)}{2}$$

ricaviamo che

$$A(b) = 2\pi b + \pi \sinh(2b).$$

Siccome $\sinh x \sim \frac{1}{2}e^x$ *quando* $x \to +\infty$ *si ha*

$$A(b) \sim \frac{\pi}{2}e^{2b} \quad \textit{quando} \quad b \to \infty.$$

d) *Dalla parametrizzazione, eliminando i parametri:*

$$x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0.$$

1.7 Esercizio

Si consideri la quadrica

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 4xz + 2kx + 2k = 0$$

al variare del parametro k.

a) Scrivere la matrice della quadrica A e determinare i valori di k per i quali la quadrica è generale.

b) Calcolare gli autovalori di Q e determinare la forma canonica di Σ, al variare di k.

c) Stabilire la natura della quadrica quando essa è degenere.

d) Determinare i valori di k per i quali la quadrica è rigata.

e) Verificare che, se $k > 0$, la quadrica consiste di due parti disconnesse, e calcolare la distanza minima tra le due parti quando $k = 3$.

Soluzione. Si ha:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 2k \end{pmatrix}$$

e un calcolo mostra che

$$\det A = -(k^2 + 6k).$$

La quadrica è generale se e solo se $k \neq 0, k \neq -6$. *Gli autovalori di* Q *sono* $1, 3, -1$ *e la quadrica è un iperboloide. Dunque la forma canonica è*

$$X^2 + 3Y^2 - Z^2 + p = 0$$

e l'invarianza del determinante dà $p = \frac{k(6+k)}{3}$. *Si vede che, se* $k > 0$ *oppure* $k < -6$ *abbiamo un iperboloide ellittico, mentre per* $-6 < k < 0$ *abbiamo un iperboloide iperbolico.*
I valori $k = 0$ *e* $k = -6$ *danno luogo al cono* $X^2 + 3Y^2 - Z^2 = 0$. *La quadrica è una rigata se e solo se* $-6 \leq k \leq 0$.

1.8 Esercizio

Determinare la forma canonica della quadrica

$$2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz + 4x + \alpha = 0$$

al variare di α, e stabilire per quali α tale quadrica è generale.

1.9 Esercizio

Determinare la forma canonica della quadrica

$$\Sigma : \alpha x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2yz - 2x + 2 = 0$$

al variare del parametro α, e stabilire per quali α tale quadrica è generale.

1.10 Esercizio

a) Data la quadrica $\Sigma : x^2 + y^2 - z^2 = 1$, determinare l'equazione del piano tangente affine nel suo punto $p = (1, 1, 1)$.

b) Se π è tale piano, è vero che $\Sigma \cap \pi$ è unione di due rette ? Quali ?

c) Determinare il versore normale nel punto generico di Σ e stabilire se esiste un punto in cui il versore normale è parallelo all'asse z.

Soluzione. L'equazione del piano tangente affine nel punto dato è $\pi : x + y - z = 1$. Sappiamo che la quadrica è rigata (in due modi diversi) dunque $\Sigma \cap \pi$ è unione di due rette. Si ottengono le rette (...)

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} y = 1 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

1.11 Esercizio

a) Verificare che la superficie $\Sigma : xyz = 1$ è regolare in tutti i suoi punti.

b) Calcolare l'equazione del piano tangente affine nel punto $p = (1, 1, 1)$.

c) Dopo aver osservato che l'origine non è un punto di Σ, determinare il valore minimo di R per il quale la sfera di raggio R centrata nell'origine : $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ incontra Σ in almeno un punto. (Suggerimento: sfruttare il fatto che, nel punto di tangenza tra Σ e tale sfera, i versori normali di Σ e della sfera sono paralleli).

d) Usare la parte precedente per calcolare la distanza minima di Σ dall'origine.

Soluzione. c) *Se $F(x, y, z) = xyz$ il versore normale sara' parallelo a*

$$\nabla F = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}.$$

D'altra parte il versore normale alla sfera è parallelo a $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. *Dunque dobbiamo imporre che il rango della matrice*

$$\begin{pmatrix} yz & x \\ xz & y \\ xy & z \end{pmatrix}$$

sia pari a 1. *Questo accade se e solo se* $x^2 = y^2 = z^2$*; dato che* $xyz = 1$ *otteniamo* $|x| = |y| = |z| = 1$ *e di conseguenza* $R = \sqrt{3}$*, e si hanno quattro punti di contatto :*

$$(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1).$$

d) *Per quanto detto, la distanza minima è* $\sqrt{3}$.

1.12 Esercizio

Per $R > 0$, sia α_R la curva contenuta ottenuta intersecando il paraboloide iperbolico $z = x^2 - y^2$ con il cilindro $x^2 + y^2 = R$.

a) Dare una parametrizzazione di α_R e verificare che α_R è regolare, ed è una curva chiusa.

b) Scrivere l'integrale che calcola la lunghezza totale $L(R)$ della curva α_R, e determinare il comportamento asintotico di $L(R)$ quando $R \to 0$ e $R \to \infty$.

c) Sia $\alpha(t)$ la curva per $R = 1$. Calcolare la curvatura $k(t)$ di α.

d) Determinare il valore numerico della curvatura e della torsione di α nei punti in cui la curva incontra il piano $z = 0$.

Soluzione. Parametrizzazione

$$\alpha_R(t) = \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \\ R^2\cos(2t) \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ R\cos(2t) \end{pmatrix}$$

da cui

$$\alpha'_R(t) = R \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -2R\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Si vede che

$$|\alpha'_R(t)|^2 = R^2(1 + 4R^2\sin^2(2t))$$

sempre positivo, dunque la curva è regolare ovunque. Poiche' le sue componenti sono funzioni periodiche di periodo 2π*, la curva è evidentemente chiusa.*

b) *Abbiamo*

$$L(R) = \int_0^{2\pi} |\alpha'_R(t)|\, dt = R\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 4R^2\sin^2(2t)}\, dt$$

Quando $R \to \infty$ si ha, per ogni t tale che $\sin(2t) \neq 0$:

$$\sqrt{1 + 4R^2 \sin^2(2t)} \sim 2R|\sin(2t)|.$$

Poichè

$$\int_0^{2\pi} |\sin(2t)|\, dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sin(2t)\, dt = 2,$$

otteniamo, quando $R \to \infty$:

$$L(R) \sim 4R^2.$$

Viceversa, quando $t \to 0$ si ha evidentemente $L(r) \sim 2\pi R$.

c) *Abbiamo*

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix},$$

dunque

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ -4\cos(2t) \end{pmatrix}, \quad \alpha'''(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 8\sin(2t) \end{pmatrix}$$

dunque

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + 4\sin^2(2t)}, \quad |\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = \sqrt{1 + 4\sin^2(2t) + 16\cos^2(2t)}$$

da cui otteniamo

$$k(t) = \sqrt{\frac{1 + 4\sin^2(2t) + 16\cos^2(2t)}{(1 + 4\sin^2(2t))^3}}$$

Un calcolo mostra che la torsione è

$$\tau(t) = -\frac{6\sin(2t)}{1 + 4\sin^2(2t) + 16\cos^2(2t)}.$$

d) *I punti in cui α incontra il piano $z = 0$ sono caratterizzati da $\cos(2t) = 0$ (quindi $\sin(2t) = 1$), e sono:*

$$t \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}.$$

Si vede che curvatura e torsione sono, in questi punti:

$$k = \frac{1}{5}, \quad \tau = \pm\frac{6}{5}.$$

1.13 Esercizio

È data la curva α, intersezione del cilindro circolare $x^2 + z^2 = 1$ con il cilindro parabolico $x^2 - y = 0$.

a) Trovare, se possibile, una parametrizzazione regolare di α, e stabilire se α è una curva limitata o illimitata.

b) Determinare l'equazione della retta tangente ad α nel suo punto $(1, 1, 0)$.

c) Calcolare la curvatura di α.

d) Determinare i punti di α in cui la torsione si annulla.

Soluzione. a) *Parametrizzazione*

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos^2 t\ , \qquad t \in \mathbf{R}. \\ z = \sin t \end{cases}$$