Esercizi 4 soluzioni

Alessandro Savo, Geometria Differenziale 2017-18

1 Esercizi forme fondamentali e curvatura

1.1 Esercizio

Data una curva regolare $\alpha : [a, b] \to \mathbf{R}^3$, la superficie rigata

$$f(u, v) = \alpha(u) + v\alpha'(u)$$

si dice *rigata delle tangenti* di α.

a) Determinare la curvatura gaussiana della rigata delle tangenti se la curva α è:

$$\alpha(u) = \begin{pmatrix} u \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}.$$

b) È vero che la rigata delle tangenti di α è sempre sviluppabile, per ogni curva α ?

1.2 Esercizio

Si consideri la superficie rigata $f(u, v) = \alpha(u) + v\xi(u)$ su $\Omega = [0, 2\pi] \times \mathbf{R}$ se

$$\alpha(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare la curvatura gaussiana K in ciascun punto, e stabilire la natura dei suoi punti (ellittici, iperbolici o parabolici).

b) Determinare i punti dove il valore assoluto di K assume valore massimo; in tali punti, calcolare le curvature principali.

c) Verificare che il punto $p = (1, 0, 0)$ appartiene a Σ; stabilire se in p esistono sezioni normali a curvatura nulla.

d) Verificare che f parametrizza una quadrica, determinando un'equazione cartesiana di Σ. Riconoscere il tipo di quadrica.

1.3 Esercizio

Si consideri l'ellissoide ottenuto ruotando intorno all'asse z la curva (ellisse) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ contenuta nel piano xz. Si assuma $a \geq b$.

a) Parametrizzare Σ, e trovare la sua equazione cartesiana.

b) Calcolare curvatura gaussiana e curvatura media di Σ.

c) Determinare i valori massimi e minimi della curvatura gaussiana, e i punti dove tali estremi sono raggiunti.

d) Calcolare le curvature principali nel punto $(a, 0, 0)$.

e) Calcolare la curvatura, nel punto $(a, 0, 0)$, della sezione normale ottenuta intersecando Σ con il piano $x + z - a = 0$.

1.4 Esercizio

a) Parametrizzare il paraboloide ellittico, di equazione $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$.

b) Calcolare la curvatura gaussiana e stabilire la natura dei punti di Σ.

c) Trovare i punti dove la curvatura gaussiana assume valore massimo; in tali punti, scrivere esplicitamente la matrice di Weingarten e determinare le curvature principali.

d) Calcolare la curvatura, nel punto $(0, 0, 0)$ della sezione normale ottenuta intersecando Σ con il piano $x + y = 0$.

Soluzione. La superficie è il grafico della funzione $z = F(x, y)$ con

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Quindi una parametrizzazione possibile è

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} \end{cases}, \qquad (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

In ogni modo, vale la formula

$$K = \frac{\det \nabla^2 F}{(1 + |\nabla F|^2)^2}.$$

Poiche'

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{2u}{a^2} \\ \frac{2v}{b^2} \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 F = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$K(u,v) = \frac{4a^6b^6}{(a^4b^4 + 4b^4u^2 + 4a^4v^2)^2}.$$

Si vede che il valore massimo della curvatura gaussiana si ottiene quando $u = v = 0$ e vale

$$K_{\max} = K(0,0) = \frac{4}{a^2b^2}.$$

Siccome l'origine è punto critico di F, abbiamo che

$$w(0,0) = \nabla^2 F(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Dunque le curvature principali sono

$$k_1 = \frac{2}{a^2}, \quad k_2 = \frac{2}{b^2}.$$

Ora il piano tangente a Σ nell'origine è $z = 0$ e una sua base è (v_1, v_2) con:

$$v_1 = f_u(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = f_v(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla formula di Eulero sappiamo che $k_X = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$, dove θ è l'angolo che X forma con v_1. La sezione piana corrispondente a $x + y = 0$ ha vettore tangente, nell'origine, che forma un angolo $\theta = \frac{3\pi}{4}$ con v_1. Dunque $\cos^2\theta = \sin^2\theta = \frac{1}{2}$ e la curvatura della sezione normale corrispondente è

$$k_X = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

1.5 Esercizio

a) Parametrizzare il paraboloide iperbolico, di equazione $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$.

b) Calcolare la curvatura gaussiana e stabilire la natura dei punti di Σ.

c) Trovare i punti dove la curvatura gaussiana assume, in modulo, valore massimo; in tali punti, scrivere esplicitamente la matrice di Weingarten e determinare le curvature principali.

d) Stabilire se nel punto $(0,0,0) \in \Sigma$ ci sono sezioni normali a curvatura nulla.

Soluzione. La superficie è il grafico della funzione $z = F(x,y)$ con

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Quindi possiamo procedere in modo simile al precedente esercizio. Una parametrizzazione possibile è

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \dfrac{u^2}{a^2} - \dfrac{v^2}{b^2} \end{cases}, \quad (u,v) \in \mathbf{R}^2.$$

Dalla formula

$$K = \frac{\det \nabla^2 F}{(1 + |\nabla F|^2)^2},$$

poiche'

$$\nabla F = \begin{pmatrix} \frac{2u}{a^2} \\ \frac{2v}{b^2} \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 F = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{pmatrix}$$

otteniamo

$$K(u,v) = -\frac{4a^6b^6}{(a^4b^4 + 4b^4u^2 + 4a^4v^2)^2}.$$

La curvatura gaussiana è sempre negativa: si vede che il valore massimo del modulo della curvatura gaussiana si ottiene quando $u = v = 0$ e vale

$$|K|_{\max} = K(0,0) = \frac{4}{a^2b^2}.$$

Siccome l'origine è punto critico di F, abbiamo che

$$w(0,0) = \nabla^2 F(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Dunque le curvature principali sono

$$k_1 = \frac{2}{a^2}, \quad k_2 = -\frac{2}{b^2}.$$

Ora il piano tangente a Σ nell'origine è $z = 0$ e una sua base è (v_1, v_2) con:

$$v_1 = f_u(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = f_v(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dalla formula di Eulero sappiamo che $k_X = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$, dove θ è l'angolo che X forma con v_1. Vogliamo trovare θ in modo che $k_X = 0$. Questo avviene quando

$$\tan^2\theta = \frac{b^2}{a^2},$$

e ci sono due angoli $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ che verificano tale equazione: precisamente, si avra'

$$\tan\theta_1 = \frac{b}{a}, \quad \tan\theta_2 = -\frac{b}{a}.$$

Quindi, nell'origine, ci sono due sezioni normali a curvatura nulla. Del resto, questo è ovvio poiche' l'intersezione di Σ con il piano tangente nell'origine (ovvero il piano $z = 0$), consiste delle due rette

$$r_1 : \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

che sono le sezioni normali a curvatura nulla cercate.

1.6 Esercizio

Si consideri il cono Σ ottenuto proiettando dal punto $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ l'ellisse $4x^2 + z^2 = 4$ del piano xz.

a) Parametrizzare Σ e trovare la sua equazione cartesiana.

b) Determinare le curvature principali di Σ nei suoi punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$.

1.7 Esercizio

Si consideri il toro di raggi $a > b > 0$.

a) Dopo aver parametrizzato Σ, si calcoli la sua curvatura gaussiana, e si determini la natura dei suoi punti.

b) Calcolare l'area della parte ellittica di Σ (intesa come insieme dei punti ellittici di Σ).

c) Calcolare l'integrale su Σ della curvatura gaussiana, e verificare che non dipende da a e b.

Soluzione. a) *La curva profilo è* $\alpha(v) = \begin{pmatrix} x(v) \\ 0 \\ z(v) \end{pmatrix}$ *con*

$$x(v) = a + b\cos v, \;\; z(t) = b\sin v,$$

e otteniamo la parametrizzazione

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} (a + b\cos v)\cos u \\ (a + b\cos v)\sin u \\ b\sin v \end{pmatrix}, \quad u \in [0, 2\pi), v \in [-\pi, \pi).$$

Un calcolo mostra che

$$\sqrt{\det g} = b(a + b\cos v)$$

e la curvatura gaussiana è:

$$K = \frac{\cos v}{b(a + b\cos v)}.$$

Siccome $b(a + b\cos v)$ è sempre positivo, si avra' che i punti ellittici corrispondono ai valori $v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, i punti iperbolici ai valori $v \in [-\pi, -\frac{\pi}{2})$ e $v \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ e i punti parabolici ai valori $v = \frac{\pi}{2}$ e $v = -\frac{\pi}{2}$ (in tutti e tre i casi $u \in [0, 2\pi)$).

b) *Da quanto detto in* a) *la parte ellittica ha area*

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} b(a + b\cos v)\, dvdu = 4\pi b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a + b\cos v)\, dv = 2\pi^2 ab + 4\pi b^2.$$

c) *Abbiamo*

$$\int_\Sigma K\, d\Sigma = \int_\Sigma K\sqrt{\det g}\, dudv = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} \cos v\, dv = 0$$

quindi l'integrale della curvatura gaussiana è sempre nullo, per ogni valore dei raggi a e b.

1.8 Esercizio

a) Parametrizzare la superficie Σ di equazione $x^3 - 2y^3 - z = 0$. Calcolare la sua curvatura gaussiana e determinare i punti ellittici (risp. parabolici, iperbolici).

b) Sia $p = (0,0,0) \in \Sigma$. Determinare le curvature principali nel punto $p = (0,0,0)$.

c) Determinare il piano affine tangente in p. È vero che Σ è localmente convessa in p ?

Soluzione. a) *La superficie è il grafico della funzione* $F(x,y) = x^3 - 2y^3$. *Parametrizzazione*

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^3 - 2v^3 \end{pmatrix}$$

Dalle formule della curvatura gaussiana otteniamo

$$K(u,v) = \frac{\det \nabla^2 F}{(1 + |\nabla F|^2)^2} = -\frac{72uv}{\Big(1 + (9u^4 + 36v^4)^2)\Big)^2}.$$

I punti ellittici sono ottenuti dalla disequazione $uv < 0$, *quindi il secondo e quarto quadrante (entrambi aperti). I punti iperbolici sono dati dal primo e terzo quadrante (entrambi aperti), e infine i punti parabolici sono dati dall'unione degli assi* u *e* v, *ovvero* $\{u = 0\} \cup \{v = 0\}$.

b) *Poiche' l'origine è un punto critico di* F, *si avra' che*

$$w(0,0) = \nabla^2 F(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque $k_1 = k_2 = 0$ *e l'origine è un punto planare.*

c) *Si vede facilmente che* Σ *non è localmente convessa in* $p = (0,0,0)$: *infatti, il suo piano tangente affine in* p *è* $z = 0$. *Infatti, la sezione piana ottenuta intersecando* Σ *con il piano* $y = 0$, *ovvero la curva*

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

è contenuta in Σ *e interseca sia il semispazio* $z > 0$ *(quando* $t > 0$*), che il semispazio* $z < 0$ *(quando* $t < 0$*). Tutto cio' per punti arbitrariamente vicini a* $p = (0,0,0)$.

1.9 Esercizio

a) Dato $R > 0$, calcolare l'area $A(R)$ della porzione di superficie $z = x^2 - y^2$ tale che $x^2 + y^2 \leq R^2$.

b) Determinare il comportamento asintotico di $A(R)$ quando $R \to 0$.

c) Determinare il comportamento asintotico di $A(R)$ quando $R \to \infty$; precisamente, dimostrare che, quando $R \to \infty$, si ha $A(R) \sim cR^3$, calcolando la costante c.

Soluzione. a) *Parametrizzazione*

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 - v^2 \end{cases}$$

Scrivendo la base (f_u, f_v) *e la matrice* g *della prima forma fondamentale, si ottiene*

$$\sqrt{\det g} = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}$$

La regione $x^2 + y^2 \le R^2$ *corrisponde alla regione* $\Omega(R) = \{(u, v) : u^2 + v^2 \le R^2\}$*, dunque*

$$A(R) = \int_{\Omega(R)} \sqrt{\det g}\, du\, dv = \int_{\Omega(R)} \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}\, dudv.$$

Usando coordinate polari (r, θ) *date da:*

$$\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$$

si ha $dudv = rdrd\theta$ *dunque*

$$A(R) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \sqrt{1 + 4r^2} \cdot rdrd\theta = 2\pi \int_0^R \sqrt{1 + 4r^2} \cdot rdr.$$

Ponendo $x = 1 + 4r^2$ *otteniamo* $dx = 8rdr$ *e l'integrale diventa*

$$A(R) = 2\pi \cdot \frac{1}{8} \int_0^{1+4R^2} \sqrt{x}\, dx$$

e svolgendo i calcoli otteniamo

$$A(R) = \frac{\pi}{6}\Big((1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1\Big).$$

b) *Calcoliamo lo sviluppo di Taylor in* $R = 0$. *Si ha* $A(0) = 0$. *Inoltre:*

$$A'(R) = 2\pi R(1 + 4R^2)^{\frac{1}{2}}, \quad A''(R) = 2\pi(1 + 4R^2)^{\frac{1}{2}} + Rh(R)$$

per una certa funzione $h(R)$. *Dunque* $A'(0) = 0, A''(0) = 2\pi$ *e lo sviluppo in* $R = 0$ *è* $A(R) = \pi R^2 + o(R)$. *La conclusione è che il comportamento asintotico quando* $R \to 0$ *è*

$$A(R) \sim \pi R^2.$$

Questo è naturale poiche' esprime il fatto che, per R *piccolo, l'area è ben approssimata dall'area di un disco euclideo di raggio* R.

c) *Veniamo al comportamento asintotico quando* $R \to \infty$. *Ora si vede che*

$$(1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} \sim 8R^3 \quad \textit{quando} \quad R \to \infty$$

e di conseguenza

$$A(R) \sim \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \textit{quando} \quad R \to \infty.$$

Ricordiamo che questo significa:

$$\lim_{R\to\infty} \frac{A(R)}{R^3} = \frac{4\pi}{3}.$$

1.10 Esercizio

È data la catenoide, parametrizzata come segue:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ v \end{pmatrix}.$$

a) Determinare il comportamento del versore normale su un punto che tende all'infinito, cioè calcolare

$$\lim_{v\to\infty} N(u,v).$$

b) Sia $\Sigma(a)$ la regione di Σ tale che $|z| \leq a$. Calcolare $\mathrm{Area}\Sigma(a)$ e determinare il suo comportamento asintotico quando $a \to \infty$.

c) Si assuma noto che la curvatura gaussiana è data da $K(u,v) = -\dfrac{1}{\cosh^4 v}$. Calcolare

$$\int_{\Sigma(a)} K \, d\Sigma$$

e verificare che il limite di tale integrale, per $a \to \infty$ (detto anche *curvatura totale* di Σ) esiste finito. Calcolare tale limite.

Soluzione. a) *Un calcolo mostra che*

$$N(u,v) = \frac{1}{\cosh v} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ -\sinh v \end{pmatrix},$$

e si vede che

$$\lim_{v\to+\infty} N(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lim_{v\to-\infty} N(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

b) *Poichè* $\sqrt{\det g} = \cosh v$ *si ha:*

$$\mathrm{Area}(\Sigma(a)) = 2\pi \int_{-a}^{a} \cosh^2 t \, dt$$

Dalla formula

$$\cosh^2 t = \frac{1 + \cosh(2t)}{2}$$

ricaviamo che

$$\mathrm{Area}(\Sigma(a)) = 2\pi a + \pi \sinh(2a).$$

Siccome $\sinh x \sim \frac{1}{2} e^x$ *quando* $x \to +\infty$ *si ha*

$$\mathrm{Area}(\Sigma(a)) \sim \frac{\pi}{2} e^{2a} \quad \textit{quando} \quad a \to \infty.$$

c) *Abbiamo*

$$\int_{\Sigma(a)} K\, d\Sigma = \int_{\Sigma(a)} K\sqrt{\det g}\, dudv.$$

Poiche' $\sqrt{\det g} = \cosh^2 v$ *:*

$$\int_{\Sigma(a)} K\, d\Sigma = -2\pi \int_{-a}^{a} \frac{1}{\cosh^2 v}\, dv = -4\pi \int_{0}^{a} \frac{1}{\cosh^2 v}\, dv$$

Ora

$$\frac{d}{dv}\tanh v = \frac{1}{\cosh^2 v}$$

dunque

$$\int_{\Sigma(a)} K\, d\Sigma = -4\pi \tanh^2 a$$

e poiche' $\lim_{a\to\infty} \tanh a = 1$ *otteniamo che la curvatura totale è finita, e vale*

$$\int_{\Sigma} K\, d\Sigma = -4\pi.$$

1.11 Esercizio

Si consideri l'equazione (superficie di livello) $\Sigma : x^2 + y^2 + xy - z = 0$.

a) Parametrizzare Σ e calcolarne la curvatura gaussiana nel punto generico. Determinare la natura dei punti di Σ (ellittici, parabolici, o iperbolici).

b) Determinare le curvature principali e le direzioni principali nel punto $(0, 0, 0) \in \Sigma$.

c) Sia $p = (0, 0, 0)$. Determinare l'equazione di $T_p\Sigma$, il piano tangente a Σ in p. Dopo aver osservato che $X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ appartiene a $T_p\Sigma$, calcolare $k_X(p)$ (la curvatura normale di Σ in p, nella direzione X). Determinare inoltre il valore massimo e il valore minimo di $k_X(p)$, al variare di X in $T_p\Sigma$ tale che $|X| = 1$.

Soluzione. a) *Notando che* $z = x^2 + y^2 + xy$ *possiamo parametrizzare* Σ *come grafico della funzione* $F(x, y) = x^2 + y^2 + xy$*. Dunque una parametrizzazione è*

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ F(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 + v^2 + uv \end{pmatrix} \qquad (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

Il calcolo della curvatura gaussiana si puo' dunque effettuare a partire dalla parametrizzazione trovata. Comunque, se $\nabla^2 F$ *è la matrice hessiana, abbiamo che*

$$K(u, v) = \frac{\det \nabla^2 F(u, v)}{(1 + |\nabla F|^2(u, v))^2}.$$

Poiche'

$$\nabla^2 F(u,v) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |\nabla F|^2(u,v) = 5u^2 + 5v^2 + 8uv,$$

otteniamo

$$K(u,v) = \frac{3}{(1 + 5u^2 + 5v^2 + 8uv)^2}$$

che è sempre positiva, dunque i punti sono tutti ellittici.

b) *Notiamo che l'origine è un punto critico di F. Si verifica immediatamente che il piano tangente nell'origine è il piano $z = 0$ e che la base $(\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v})$ è data da*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo mostra che, nell'origine, g è la matrice identità, e dunque la matrice dell'operatore di Weingarten coincide con la matrice hessiana (nell'origine), cioè :

$$w = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Occorre dunque calcolare autovettori e autovalori di w. Gli autovalori sono $\lambda = 1, \mu = 3$ e una base ortonormale di autovettori (direzioni principali) è data dai vettori $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} E_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} E_2$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} E_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} E_2$, dunque

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

associati rispettivamente a λ e μ.

c) *Abbiamo già visto che l'equazione del piano tangente nell'origine è $z = 0$. Sappiamo che la curvatura normale di Σ in p, nella direzione X, è data da*

$$k_X(p) = II(X,X) = \langle W(X), X \rangle.$$

Per il dato vettore tangente X, abbiamo

$$X = \frac{1}{2} E_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} E_2,$$

dunque sapendo che

$$\begin{cases} W(E_1) = 2E_1 + E_2 \\ W(E_2) = E_1 + 2E_2 \end{cases}$$

otteniamo

$$W(X) = (1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) E_1 + (\frac{1}{2} + \sqrt{3}) E_2$$

e di conseguenza

$$k_X(p) = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Infine, il valore massimo (risp. minimo) della curvatura normale in un dato punto coincide con la curvatura principale massima (risp. minima) nel punto. Tali valori sono, per quanto calcolato in precedenza, $\mu = 3$ *e, rispettivamente,* $\lambda = 1$.

Per calcolare $k_X(p)$ *potevamo anche procedere usando il teorema di Eulero:*

$$k_X = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta,$$

dove θ *è l'angolo formato da* X *e* v_1. *Ora*

$$\cos\theta = \langle X, v_1\rangle = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \quad \sin\theta = \langle X, v_2\rangle = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Poiche' $k_1 = 1, k_2 = 3$ *svolgendo i calcoli otteniamo*

$$k_X = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1.12 Esercizio

Si consideri la curva $\alpha(u) = \begin{pmatrix} u \\ 1+u^3 \\ 0 \end{pmatrix}$ del piano xy e il cilindro Σ che proietta α parallelamente al vettore $\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Parametrizzare Σ e verificarne la regolarità.

b) Determinare curvatura gaussiana e curvatura media di Σ.

c) Determinare l'insieme dei punti di Σ in cui le curvature principali sono entrambe nulle.

d) Eliminare i parametri e trovare l'equazione cartesiana di Σ.

1.13 Esercizio

È data la superficie di equazione $z = 3x^2 - y^3$.

a) Calcolare la curvatura gaussiana e stabilire la natura dei punti di Σ.

b) È vero che Σ è una superficie rigata ?

Soluzione. Si ha $z = F(x,y)$ *con* $F(x,y) = 3x^2 - y^3$. *Parametrizzazione*

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 3u^2 - v^3 \end{pmatrix}$$

e, con facili calcoli, $\nabla F(u,v) = (6u, -3v^2)^t$ *e* $\nabla^2 F = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6v \end{pmatrix}$. *Dunque*

$$K(u,v) = -\frac{36v}{(1+36u^2+9v^4)^2}.$$

Punti ellittici definiti da $v < 0$, *iperbolici* $v > 0$ *e parabolici* $v = 0$. *La superficie non puo' essere rigata poiche' possiede punti ellittici.*