Esercizi 5 soluzioni

Alessandro Savo, Geometria Differenziale 2017-18

1 Esercizi su geodetiche e curve su superfici

1.1 Esercizio

Determinare l'area della regione del paraboloide $z = x^2 + y^2$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = a$ dove $a > 0$. Ottenere il risultato parametrizzando il paraboloide in due modi diversi: come grafico di una funzione, e come superficie di rivoluzione.

1.2 Esercizio

a) Parametrizzare il cilindro circolare retto di raggio 1, ovvero la superficie di equazione $x^2+y^2 = 1$.

b) Scrivere esplicitamente le equazioni delle geodetiche.

c) Verificare che le geodetiche del cilindro sono: le generatrici (rette parallele all'asse z), i paralleli, le eliche di raggio 1 e passo arbitrario.

Soluzione. a) *Il cilindro si ottiene per rotazione della retta* $\alpha(u_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_2 \end{pmatrix}$ *del piano* xz *intorno all'asse* z. *Dunque una parametrizzazione è*

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} \cos u_1 \\ \sin u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (u_1, u_2) \in \mathbf{R}^2.$$

b) *Ricordiamo dalla sezione 4 della parte 5 che le equazioni delle geodetiche di una superficie di rotazione sono, nelle coordinate* (u_1, u_2)*:*

$$\begin{cases} u_1'' + 2\dfrac{\phi'(u_2)}{\phi(u_2)} u_1' u_2' = 0 \\ u_2'' - \phi(u_2)\phi'(u_2)(u_1')^2 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dove

$$\alpha(u_2) = \begin{pmatrix} \phi(u_2) \\ 0 \\ \psi(u_2) \end{pmatrix}$$

è una parametrizzazione della curva profilo (con l'ascissa curvilinea). Nel nostro caso abbiamo che la distanza dall'asse, misurata da ϕ, è costante, uguale a 1:

$$\phi(u_2) = 1.$$

Dunque le equazioni sono semplicemente:

$$\begin{cases} u_1'' = 0 \\ u_2'' = 0 \end{cases},$$

e le soluzioni sono rette (del dominio Ω):

$$\begin{cases} u_1(t) = at + b \\ u_2(t) = ct + d \end{cases}$$

dove a, b, c, d sono opportune costanti reali. In altre parole,

- La curva preimmagine di una geodetica del cilindro è sempre una retta.

Le geodetiche sono dunque le curve del cilindro parametrizzate come segue:

$$\alpha(t) = f(u_1(t), u_2(t)) = \begin{pmatrix} \cos(at + b) \\ \sin(at + b) \\ ct + d \end{pmatrix}.$$

Un calcolo mostra che $|\alpha'(t)| = \sqrt{a^2 + c^2}$, dunque la parametrizzazione di α è proporzionale all'ascissa curvilinea, ed è l'ascissa curvilinea quando

$$a^2 + c^2 = 1.$$

Un calcolo mostra che la curvatura e la torsione di α sono entrambe costanti, dunque una geodetica è una retta (generatrice) quando la curvatura è nulla; un parallelo (circonferenza di raggio 1) quando la torsione è nulla ma la curvatura è positiva, ed è un'elica circolare vera e propria quando sia la curvatura che la torsione sono non-nulle.

Piu' in dettaglio, supporremo per semplicita' che $a^2 + c^2 = 1$; si trova allora che curvatura e torsione valgono rispettivamente

$$k(t) = a^2, \quad \tau(t) = -ac.$$

Se $a = 0$ (dunque $c = 1$) la curvatura è nulla e, al variare di b, d abbiamo la famiglia delle rette generatrici:

$$\begin{cases} u_1(t) = b \\ u_2(t) = t + d \end{cases}$$

Se $c = 0$ (dunque $a = 1$) la torsione è nulla e abbiamo la famiglia dei paralleli (circonferenze di raggio 1)

$$\begin{cases} u_1(t) = t + b \\ u_2 = d \end{cases}$$

e infine, se a e c sono entrambi non nulli, abbiamo la famiglia delle eliche circolari.

1.3 Esercizio

È data la catenoide

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in [0,2\pi) \times \mathbf{R}.$$

a) Scrivere la seconda forma fondamentale (utilizzare formule note).

b) Determinare le curve asintotiche di Σ passanti per il punto $p = (1,0,0)$ e verificare che, in p, esse si incontrano ortogonalmente.

c) Sia Σ una superficie minimale. Dimostrare che, se p è un punto iperbolico di Σ, allora le due direzioni asintotiche in p sono ortogonali tra loro. (Usare il teorema di Eulero).

Soluzione. a) *Risulta che*

$$N = \frac{1}{\cosh v} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ -\sinh v \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $(E_1 = f_u, E_2 = f_v)$ *la base usuale del piano tangente. Ricordiamo che il vettore tangente* X *è una direzione asintotica se* $II(X,X) = 0$ *ovvero, se la curvatura* k_X *della sezione normale definita da* X *è nulla. Se* $X = a_1E_1 + a_2E_2$ *allora* X *è una direzione asintotica se*

$$l_{11}a_1^2 + 2l_{12}a_1a_2 + l_{22}a_2^2 = 0.$$

Dunque la curva $\alpha(t) = f(u(t), v(t))$ *è asintotica in* Σ *se la sua preimmagine*

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$$

soddisfa l'equazione differenziale

$$l_{11}u'(t)^2 + 2l_{12}u'(t)v'(t) + l_{22}v'(t)^2 = 0.$$

Nel nostro caso abbiamo

$$u'(t)^2 - v'(t)^2 = 0$$

Poiche' $p = f(0,0)$ *abbiamo due soluzioni dell'equazione precedente, che danno luogo alle preimmagini:*

$$\gamma_1 : \begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = t \end{cases}, \quad \gamma_2 : \begin{cases} u(t) = t \\ v(t) = -t \end{cases}$$

Dunque le due curve asintotiche per il punto p sono date da:

$$\alpha_1(t) = f(t,t) = \begin{pmatrix} \cosh t \cos t \\ \cosh t \sin t \\ t \end{pmatrix}, \quad \alpha_2(t) = f(t,-t) = \begin{pmatrix} \cosh t \cos t \\ \cosh t \sin t \\ -t \end{pmatrix}$$

c) *Se X è un vettore tangente unitario, abbiamo dal teorema di Eulero:*

$$k_X = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta,$$

dove θ è l'angolo tra X e la direzione principale associata a k_1. Se X è una direzione asintotica si ha $k_X = 0$; se Σ è minimale e il punto è iperbolico allora $k_2 = -k_1$ ed entrambi sono non-nulli. Dunque otteniamo

$$0 = k_1^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

da cui $\cos\theta = \sin\theta$ oppure $\cos\theta = -\sin\theta$. Le due direzioni asintotiche formano angoli $\theta = \pi/4$ e $\theta = 3\pi/4$ con un asse fissato e sono dunque ortogonali tra loro. Osserviamo che in un punto iperbolico di una superficie minimale le direzioni asintotiche sono anche le bisettrici delle due direzioni principali.

1.4 Esercizio

È data la superficie Σ di equazione $z = x^2 - 3y^2$ e il suo punto $p = (0, 0, 0)$.

a) Determinare le direzioni principali e le curvature principali nel punto p.

b) Determinare le direzioni asintotiche in p.

c) Parametrizzare le due curve asintotiche passanti per p.

Soluzione. Parametrizziamo la superficie in quanto grafico:

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ u^2 - 3v^2 \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

Una base del piano tangente in (u, v) è

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6v \end{pmatrix}; \quad \textit{in } p \quad E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'origine corrisponde alle coordinate $u = 0, v = 0$, e siccome $(0, 0)$ è un punto critico di $F(x, y) = x^2 - 3y^2$, abbiamo che, nel punto dato

$$l = w = \nabla^2 F(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

Dunque le curvature principali sono $k_1 = 2, k_2 = -6$ con direzioni principali associate date, rispettivamente, da E_1 e E_2. Il punto p è iperbolico e dunque abbiamo due direzioni asintotiche.

b) *Ora il vettore $X = a_1 E_1 + a_2 E_2$ è direzione asintotica se*

$$2a_1^2 - 6a_2^2 = 0;$$

Poiché una direzione è definita a meno di un fattore di proporzionalita' non nullo, possiamo supporre che $a_2 = 1$: dunque $a_1 = \pm\sqrt{3}$ e abbiamo le direzioni asintotiche

$$v_1 = \sqrt{3}E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = -\sqrt{3}E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) *La seconda forma fondamentale ha matrice l_{ij} che, in ciascun punto, è un multiplo non nullo dell'hessiana $\nabla^2 F = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$. La curva in coordinate locali $\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases}$ è dunque una curva asintotica se e solo se*

$$2u'(t)^2 - 6v'(t)^2 = 0. \tag{2}$$

Le due curve

$$\gamma_1 : \begin{cases} u = \sqrt{3}t \\ v = t \end{cases}, \quad \gamma_2 = \begin{cases} u = -\sqrt{3}t \\ v = t \end{cases}$$

passano per $(0,0)$ al tempo $t = 0$, e verificano l'equazione (2) per ogni valore di t. Esse sono dunque le preimmagini delle curve asintotiche richieste, che risultano essere

$$\alpha_1(t) = f(\sqrt{3}t, t) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2(t) = f(-\sqrt{3}t, t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che α_1 e α_2 parametrizzano le rette ottenute come intersezione di Σ (paraboloide iperbolico, dunque superficie rigata) con il piano tangente nell'origine, cha ha equazione $z = 0$.

1.5 Esercizio

Sia Σ la sfera di centro l'origine e raggio 1, di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
a) Parametrizzare la geodetica α uscente dal punto $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$ con velocità iniziale $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$.
b) Determinare le intersezioni di α con l'equatore $z = 0$; per ogni punto q cosi' ottenuto, calcolare la lunghezza dell'arco geodetico α da p a q.

Soluzione. La geodetica della sfera unitaria passante per p con direzione iniziale ξ è il cerchio massimo contenente l'origine, il punto p e il vettore ξ; una sua parametrizzazione è

$$\alpha(t) = \cos t \cdot p + \sin t \cdot \xi,$$

e nel nostro caso

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin t \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

L'intervallo di definizione è scelto in modo che il cerchio massimo sia percorso una sola volta. Le intersezioni con l'equatore $z = 0$ *si ottengono ponendo* $\cos t = 0$*, dunque* $t = \pi/2, \frac{3}{\pi}/2$*, corrispondenti ai punti*

$$q_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0), \quad q_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

e le lunghezze dei relativi archi di geodetica (percorsa nel verso prescritto dalla parametrizzazione) sono rispettivamente $\pi/2$ *e* $3\pi/2$*.*

1.6 Esercizio

Si consideri l'ellissoide $F(x, y, z) = 0$ dove $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1$.

a) Si determini il vettore ∇F (che risulta parallelo al versore normale).

b) Si consideri la sezione piana α_c ottenuta intersecando Σ con il piano $z = c$. Parametrizzare tale curva, e stabilire per quali valori di c essa è una geodetica di Σ. Disegnare α_c.

c) Ripetere l'esercizio b) per ciascuna delle sezioni piane $x = c, y = c$.

Soluzione. Si ha

$$\nabla F = \begin{pmatrix} 2x \\ 4y \\ 6z \end{pmatrix}.$$

b) *La curva* α_c *(che è un'ellisse) si esprime:*

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 - 3c^2 \\ z = c \end{cases}$$

e una sua parametrizzazione è

$$\begin{cases} x = \lambda \cos t \\ y = \dfrac{\lambda}{\sqrt{2}} \sin t \\ z = c \end{cases}$$

dove si è posto $\lambda = \sqrt{1 - 3c^2}$ *(ovviamente supponiamo* $1 - 3c^2 > 0$*, altrimenti l'intersezione è vuota, oppure si riduce a un punto). La curva è una geodetica se e solo se essa ha curvatura geodetica nulla, ovvero se e solo se*

$$\det(\alpha'(t), \alpha''(t), N_\Sigma(\alpha(t)) = 0$$

per ogni t*. Poiche'* ∇F *è ovunque ortogonale alla superficie di livello, esso è parallelo a* N_Σ*, dunque*

$$N_\Sigma(\alpha(t)) = \mu(t) \begin{pmatrix} 2\lambda \cos t \\ \frac{4\lambda}{\sqrt{2}} \sin t \\ 6c \end{pmatrix},$$

per qualche funzione $\mu(t)$. Sviluppando il determinante si vede facilmente che esso si annulla se e solo se $c = 0$. Dunque,

- *l'unica sezione $z = c$ che risulta essere una geodetica è $z = 0$.*

c) *Procedendo in modo analogo si osserva che, tra le sezioni $x = c$ e $y = d$, le uniche geodetiche si ottengono per $c = 0$ e, rispettivamente, $d = 0$.*

1.7 Esercizio

Si consideri la superficie Σ (ellissoide di rotazione):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

a) Verificare che le sezioni piane ottenute come intersezione dell'ellissoide con i piani coordinati $x = 0, y = 0, z = 0$ sono tutte geodetiche (se parametrizzate dall'ascissa curvilinea).

b) Enunciare il Teorema di Clairaut per le geodetiche su una superficie di rotazione.

c) Sia $\gamma_1 = \Sigma \cap \{z = 0\}$ la geodetica ottenuta come intersezione di Σ con il piano xy. Sia $p = (a, 0, 0)$ un punto di γ_1, e sia α la geodetica di Σ uscente da p, orientata nel verso delle z crescenti, e che forma un angolo di $\pi/3$ con γ_1. Determinare il valore minimo che può assumere la distanza di $\alpha(t)$ dall'asse z, e inoltre il valore massimo che può assumere la quota di $\alpha(t)$ (ovvero, la sua terza coordinata).

Soluzione. Notiamo innanzitutto che le sezioni piane ottenute intersecando l'ellissoide con i piani $z = c$ sono circonferenze. Dunque Σ si ottiene come rotazione dell'ellisse del piano xz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

intorno all'asse z.

a) *Procedere come nell'esercizio precedente.*

b) *Il teorema di Clairaut afferma che, se γ è una geodetica di una superficie di rotazione, allora il prodotto*

$$\mu(t) \doteq \rho(t) \cos\theta(t)$$

è costante, dove $\rho(t)$ è la distanza di $\gamma(t)$ dall'asse di rotazione, e $\theta(t)$ è l'angolo tra $\gamma'(t)$ e il parallelo passante per $\gamma(t)$ (si assume $\theta(t) \in [0, \pi/2]$).

c) *Al tempo $t = 0$ abbiamo $\rho(0) = a$ e $\theta(0) = \pi/3$. Per il teorema di Clairaut avremo dunque*

$$\rho(t) \cos\theta(t) = \frac{a}{2}$$

per ogni t. Siccome $\cos\theta(t) \leq 1$ otteniamo che

$$\rho(t) \geq \frac{a}{2}$$

e la distanza minima dall'asse di rotazione è $a/2$. Ora la distanza dall'asse z è data da $\sqrt{x^2+y^2}$, dunque si vede che la quota massima raggiunta da un punto mobile sulla geodetica si ottiene dall'equazione

$$\frac{1}{4}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

dunque la quota massima è

$$z_{\max}=\frac{\sqrt{3}c}{2}.$$

Si puo' verificare che in effetti tale quota massima è raggiunta quando la geodetica è tangente al parallelo, cioè al tempo t_0 tale che $\theta(t_0)=0$.

1.8 Esercizio

Si consideri la superficie ottenuta ruotando la curva $x=\dfrac{1}{z}$ del piano xz intorno all'asse z (si assuma $z>0$).

a) Parametrizzare Σ, inoltre determinare il versore normale e il piano tangente a Σ nel suo punto $(1,0,1)$. Dato $a>0$, scrivere l'integrale che esprime l'area della regione $\Sigma_a \subseteq \Sigma$ definita dalle disuguaglianze $a<z\leq 1$, e stabilire se Σ_a ha area finita oppure no quando $a\to 0$.

b) Si consideri il parallelo $\Gamma_c : z=c$, dove $c>0$ è costante. Determinare gli eventuali valori di c per i quali Γ_c è una geodetica di Σ. Determinare inoltre i valori che puo' assumere il valore assoluto della curvatura geodetica di Γ_c.

c) Sia ora α la geodetica uscente da $p\in\Gamma_1$, diretta nel verso delle z crescenti, che forma con il parallelo Γ_1 un angolo di $\frac{\pi}{6}$ radianti. Calcolare la quota massima raggiunta da α.

Soluzione. a) *Parametrizzazione*

$$f(u,v)=\begin{pmatrix}\frac{1}{v}\cos u\\ \frac{1}{v}\sin u\\ v\end{pmatrix},\quad (u,v)\in[0,2\pi]\times(0,+\infty).$$

quindi

$$f_u\wedge f_v=\begin{pmatrix}\frac{1}{v}\cos u\\ \frac{1}{v}\sin u\\ \frac{1}{v^3}\end{pmatrix},\quad |f_u\wedge f_v|=\frac{\sqrt{1+v^4}}{v^3},\quad N=\frac{v^3}{\sqrt{1+v^4}}\begin{pmatrix}\frac{1}{v}\cos u\\ \frac{1}{v}\sin u\\ \frac{1}{v^3}\end{pmatrix}.$$

L'area della regione in esame si calcola con l'integrale

$$A=2\pi\int_a^1\frac{\sqrt{1+v^4}}{v^3}\,dv$$

poiche' $1+v^4\geq 1$ si avra' $A\geq 2\pi\int_a^1\frac{1}{v^3}\,dv$ che diverge quando $a\to 0$.

b) *Sappiamo che $v=c$ è una geodetica se e solo se c è un punto critico della funzione distanza dall'asse, cioè $\phi(v)=\frac{1}{v}$. Poichè $\phi'(v)<0$ per ogni v risultera' che non ci sono paralleli che* *siano anche geodetiche. Ora* Γ_c *si parametrizza*

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\cos t \\ \frac{1}{c}\sin t \\ c \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Usiamo la formula della curvatura geodetica

$$k_g(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^3}\ \det(\alpha'(t), \alpha''(t), N(\alpha(t))).$$

Poiche'

$$N(\alpha(t)) = \frac{c^3}{\sqrt{1+c^4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\cos t \\ \frac{1}{c}\sin t \\ \frac{1}{c^3} \end{pmatrix}$$

un calcolo mostra che

$$k_g(t) = \frac{c}{\sqrt{1+c^4}}$$

che, ovviamente, non dipende da t*, ma solo da* c*. Si vede che*

$$\lim_{c\to 0} k_g(t) = 0, \quad \lim_{c\to +\infty} k_g(t) = 0,$$

e che, in quanto funzione di c*,* k_g *ammette un solo punto critico: il suo massimo, assunto in* $c = 1$ *e di valore* $\frac{1}{\sqrt{2}}$*. Dunque i valori possibili di* k_g *sono costituiti dall'intervallo* $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

c) *Il Teorema di Clairaut afferma che la funzione*

$$\mu(t) = \rho(t)\cos\theta(t)$$

è costante lungo la geodetica $\alpha(t)$*. Qui* $\rho(t)$ *è la distanza dall'asse di rotazione e* $\theta(t)$ *è l'angolo che* $\alpha'(t)$ *forma con il parallelo per* $\alpha(t)$*. Ora* $\rho(t)$ *è la coordinata* x *di* $\alpha(t)$*; dai dati del problema abbiamo* $\rho(0) = 1$ *e* $\theta(0) = \pi/6$ *dunque:*

$$\rho(t)\cos\theta(t) = \rho(0)\cos\theta(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ora $\cos\theta(t) \leq 1$ *dunque, per ogni* t*:*

$$\rho(t) \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

e di conseguenza $z_{max} \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$*. (Si puo' dimostrare che la quota massima* $z = 2/\sqrt{3}$ *è effettivamente raggiunta in corrispondenza del valore* t_0 *tale che* $\theta(t_0) = 0$*, cioè quando la geodetica diventa tangente al parallelo).*

1.9 Esercizio

Si consideri la superficie di rotazione Σ parametrizzata nel modo seguente:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \cosh v \cos u \\ \cosh v \sin u \\ \sinh v \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in [0, 2\pi] \times (-\infty, \infty),$$

e si denoti con Γ il parallelo definito dall'equazione $v = 0$.

a) Determinare prima e seconda forma fondamentale e curvatura gaussiana nei punti di Γ (attenzione, la curva profilo non è parametrizzata dall'ascissa curvilinea).

b) Determinare l'equazione cartesiana di Σ, e verificare che Σ è una quadrica; inoltre, dimostrare che per il punto $p = (1, 0, 0) \in \Sigma$ passano due rette distinte interamente contenute in Σ.

c) Sia $\gamma : [0, \infty) \to \Sigma$ una geodetica di Σ tale che $\gamma(0) = (1, 0, 0) \in \Gamma$. Supponiamo che la velocità iniziale $\gamma'(0)$ formi con Γ un angolo acuto positivo $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, e che $\gamma'(0)$ sia orientato nel verso delle z crescenti. Sia $z(t)$ la terza coordinata di $\gamma(t)$: stabilire se $z(t)$ raggiunge un valore massimo, ovvero se esiste t_0 tale che $z(t) \le z(t_0)$ per ogni t.

1.10 Esercizio

Sia α la circonferenza del piano xz, di centro $(a, 0, 0)$ e raggio b, parametrizzata come segue:

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a + b\cos t \\ 0 \\ b \sin t \end{pmatrix} \quad t \in [-\pi, \pi].$$

e sia Σ il toro ottenuto ruotando α intorno all'asse z. Si assuma $a > b$.

a) Parametrizzare Σ con coordinate t, θ, e sia Γ_c il parallelo $t = c$.

b) Calcolare la curvatura geodetica di Γ_c e trovare i valori di c per i quali Γ_c è una geodetica.

c) Calcolare la curvatura normale di Γ_c e trovare i valori di c per i quali Γ_c è una curva asintotica.

d) Si consideri la geodetica γ uscente dal punto $P_1 = (a + b, 0, 0)$ che forma con il parallelo per P_1 un angolo iniziale di ϕ_0 radianti. Determinare il valore minimo $T > 0$ tale che, se $\cos \phi_0 \ge T$, allora γ è sempre contenuta nella regione dove $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

1.11 Esercizio

Si consideri la curva del piano xz (detta *trattrice*) parametrizzata come segue:

$$\alpha(s) = \begin{pmatrix} \phi(s) \\ 0 \\ \psi(s) \end{pmatrix}$$

dove

$$\phi(s) = e^{-s}, \quad \psi(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2\tau}}\, d\tau, \quad v \in (0, +\infty).$$

a) Verificare che s è l'ascissa curvilinea di α, calcolando il versore normale $T(s)$.

b) Si fissi s, e sia $p(s)$ il punto ottenuto intersecando l'asse z con la retta tangente alla curva in $\alpha(s)$. Verificare che $d(p(s), \alpha(s)) = 1$ per ogni s.

c) Calcolare la curvatura di α.

Soluzione. a) *Si ha*

$$\alpha'(s) = \begin{pmatrix} -e^{-s} \\ 0 \\ \sqrt{1 - e^{-2s}} \end{pmatrix}$$

dunque $|\alpha'(s)| = 1$ *e* s *è l'ascissa curvilinea. Evidentemente* $T(s) = \alpha'(s)$.

b) *La retta tangente ad* α *nel suo punto* $\alpha(s)$ *si parametrizza:*

$$\beta(t) = \alpha(s) + t\alpha'(s) = \begin{pmatrix} \phi(s) + t\phi'(s) \\ 0 \\ \psi(s) + \psi'(s) \end{pmatrix}$$

Notiamo che $|\beta'(t)| = 1$ *per ogni* t*; dunque* t *è l'ascissa curvilinea, e la lunghezza della arco da* $\beta(0)$ *a* $\beta(t)$ *è dunque uguale a* t*. Ora l'intersezione con l'asse* z *si ottiene quando* $x = 0$*, ovvero per*

$$t = -\frac{\phi(s)}{\phi'(s)} = 1.$$

Siccome t *è l'ascissa curvilinea di* β*, si vede che*

$$d(p(s), \alpha(s)) = 1$$

per ogni s*.*

c) *Si verifica che*

$$k(s) = \frac{e^{-s}}{\sqrt{1 - e^{-2s}}}.$$

1.12 Esercizio

Sia ora Σ la superficie ottenuta per rotazione della trattrice α dell'esercizio precedente intorno all'asse z. Tale superficie è detta *pseudosfera*, e si parametrizza:

$$f(u, s) = \begin{pmatrix} \phi(s) \cos u \\ \phi(s) \sin u \\ \psi(s) \end{pmatrix}, \quad (u, s) \in [0, 2\pi) \times [0, \infty),$$

dove $\phi(s) = e^{-s}, \psi(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2\tau}}\, d\tau$. Si osservi che Σ è una superficie illimitata.

a) Calcolare l'area della regione $\Sigma(a)$ dove $0 \leq s \leq a$.

b) Mostrare come l'area totale della pseudosfera:

$$\text{Area}(\Sigma) \doteq \lim_{a \to \infty} \text{Area}(\Sigma(a))$$

sia un numero finito, e calcolare tale numero.

c) Calcolare la curvatura gaussiana di Σ.

Soluzione. a) *Siccome s è l'ascissa curvilinea sulla curva profilo, abbiamo che:*

$$\mathrm{Area}(\Sigma(a)) = 2\pi \int_0^a \phi(s)\, ds = 2\pi(1 - e^{-a}).$$

b) *Evidentemente*

$$\mathrm{Area}(\Sigma) = 2\pi.$$

c) *Da formule generali sappiamo che le curvature principali sono:*

$$k_1 = -\frac{\psi'(s)}{\phi(s)}, \quad k_2 = \phi''(s)\psi'(s) - \phi'(s)\psi''(s).$$

Un calcolo mostra che

$$k_1 = -\frac{e^{-s}}{\sqrt{1 - e^{-2s}}}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{1 - e^{-2s}}}{e^{-s}}$$

In particolare:

$$K(u, s) = -1$$

costante.

1.13 Esercizio

Si consideri la superficie parametrizzata $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ definita come:

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} u - 2v \\ 2u - v \\ -2u^2 + 5uv - 2v^2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare prima e seconda forma fondamentale, e curvatura gaussiana.

b) Si determinino le direzioni asintotiche nel punto $f(0, 0)$.

c) Si determini la curvatura geodetica e la curvatura normale della sezione piana ottenuta intersecando Σ con il piano $x + y = 0$.