Gennaio 17

January 24, 2017

Prova scritta di Geometria Differenziale 17.01.2017
Ingegneria Meccanica, a.a. 2016-2017

Cognome .... Nome ....

L'esame consiste di quattro esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Non saranno accettati fogli di brutta copia.

Esercizio 1 (vedere Appunti) Sia $f = f(u_1, u_2)$ una superficie parametrizzata regolare definita su un aperto Ω di $\mathbf{R}^2$, e si ponga $\Sigma = f(\Omega)$.

a) Spiegare cosa significa che la parametrizzazione f è regolare, definire il piano tangente $T_p\Sigma$ alla superficie nel suo punto $p = f(u_1, u_2)$ e trovare una base di $T_p\Sigma$.

b) Definire il versore normale N e l'operatore di Weingarten W. Dimostrare che W trasforma vettori di $T_p\Sigma$ in vettori di $T_p\Sigma$.

c) Definire le curvature principali nel punto p, la curvatura gaussiana e la curvatura media. Inoltre dare una formula della curvatura gaussiana in funzione delle matrici della prima e seconda forma fondamentale.

Esercizio 2 Si consideri la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

dove $\phi(t)$ è una funzione positiva di t.

a) Calcolare la curvatura di α per un generico valore di t.
Soluzione. Abbiamo:

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ \phi' \end{pmatrix}, \quad \alpha''(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ \phi'' \end{pmatrix}, \quad \alpha'''(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ \phi''' \end{pmatrix}$$

Dunque:

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \begin{pmatrix} \phi' \sin t + \phi'' \cos t \\ \phi'' \sin t - \phi' \cos t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)| = \sqrt{1 + \phi'^2 + \phi''^2}$$

Poiché

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1+\phi'^2}$$

si ha:

$$k(t) = \sqrt{\frac{1+\phi'^2+\phi''^2}{(1+\phi'^2)^3}}$$

b) Sia M una matrice ortogonale. Calcolare la curvatura della curva $\beta(t) = M\alpha(t)$.

Soluzione. Poiche' l'applicazione $f(x) = Mx$ è un'isometria (in quanto M è ortogonale) la curvatura di β è uguale, punto per punto, alla curvatura di α.

c) Calcolare curvatura e torsione di α in t se $\phi(t) = 2t+3$.

Soluzione. Poiche' $\phi'(t) = 2, \phi''(t) = 0$ si ottiene subito $k(t) = \frac{1}{5}$. Ora

$$\tau(t) = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}$$

e si ottiene $\tau(t) = -\frac{2}{5}$.

Esercizio 3 Si consideri la superficie ottenuta ruotando la curva $x = \dfrac{1}{z}$ del piano xz intorno all'asse z (si assuma $z > 0$).

a) Parametrizzare Σ, inoltre determinare il versore normale e il piano tangente a Σ nel suo punto $(1,0,1)$. Dato $a > 0$, scrivere l'integrale che esprime l'area della regione $\Sigma_a \subseteq \Sigma$ definita dalle disuguaglianze $a < z \leq 1$, e stabilire se Σ_a ha area finita oppure no quando $a \to 0$.

Soluzione. Parametrizzazione

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{v}\cos u \\ \frac{1}{v}\sin u \\ v \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in [0,2\pi] \times (0,+\infty).$$

quindi

$$f_u \wedge f_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{v}\cos u \\ \frac{1}{v}\sin u \\ \frac{1}{v^3} \end{pmatrix}, \quad |f_u \wedge f_v| = \frac{\sqrt{1+v^4}}{v^3}, \quad N = \frac{v^3}{\sqrt{1+v^4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{v}\cos u \\ \frac{1}{v}\sin u \\ \frac{1}{v^3} \end{pmatrix}.$$

L'area della regione in esame si calcola con l'integrale

$$A = 2\pi \int_a^1 \frac{\sqrt{1+v^4}}{v^3}\, dv$$

poiche' $1+v^4 \geq 1$ si avra' $A \geq 2\pi \int_a^1 \frac{1}{v^3}\, dv$ che diverge quando $a \to 0$.

b) Si consideri il parallelo $\Gamma_c : z = c$, dove $c > 0$ è costante. Determinare gli eventuali valori di c per i quali Γ_c è una geodetica di Σ. Determinare inoltre i valori che puo' assumere il valore assoluto della curvatura geodetica di Γ_c.

Soluzione. Sappiamo che $v = c$ è una geodetica se e solo se c è un punto critico della funzione distanza dall'asse, cioè $\phi(v) = \frac{1}{v}$. Poichè $\phi'(v) < 0$ per ogni v risultera' che non ci sono paralleli che siano anche geodetiche. Ora Γ_c si parametrizza

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\cos t \\ \frac{1}{c}\sin t \\ c \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Usiamo la formula della curvatura geodetica

$$k_g(t) = \frac{1}{|\alpha'(t)|^3} \det(\alpha'(t), \alpha''(t), N(\alpha(t))).$$

Poiche'

$$N(\alpha(t)) = \frac{c^3}{\sqrt{1+c^4}} \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\cos t \\ \frac{1}{c}\sin t \\ \frac{1}{c^3} \end{pmatrix}$$

un calcolo mostra che

$$k_g(t) = \frac{c}{\sqrt{1+c^4}}$$

che, ovviamente, non dipende da t, ma solo da c. Si vede che

$$\lim_{c\to 0} k_g(t) = 0, \quad \lim_{c\to +\infty} k_g(t) = 0,$$

e che, in quanto funzione di c, k_g ammette un solo punto critico: il suo massimo, assunto in $c = 1$ e di valore $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Dunque i valori possibili di k_g sono costituiti dall'intervallo $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$.

c) Sia ora α la geodetica uscente da $p \in \Gamma_1$, diretta nel verso delle z crescenti, che forma con il parallelo Γ_1 un angolo di $\frac{\pi}{6}$ radianti. Calcolare la quota massima raggiunta da α.

Soluzione. Il Teorema di Clairaut afferma che la funzione

$$\mu(t) = \rho(t)\cos\theta(t)$$

è costante lungo la geodetica $\alpha(t)$. Qui $\rho(t)$ è la distanza dall'asse di rotazione e $\theta(t)$ è l'angolo che $\alpha'(t)$ forma con il parallelo per $\alpha(t)$. Ora $\rho(t)$ è la coordinata x di $\alpha(t)$; dai dati del problema abbiamo $\rho(0) = 1$ e $\theta(0) = \pi/6$ dunque:

$$\rho(t)\cos\theta(t) = \rho(0)\cos\theta(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ora $\cos\theta(t) \leq 1$ *dunque, per ogni* t*:*

$$\rho(t) \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

e di conseguenza $z_{max} \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$*. (Si puo' dimostrare che la quota massima* $z = 2/\sqrt{3}$ *è effettivamente raggiunta in corrispondenza del valore* t_0 *tale che* $\theta(t_0) = 0$*, cioè quando la geodetica diventa tangente al parallelo).*

Esercizio 4 a) Determinare gli autovalori della matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 3 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro reale k.

Soluzione. Gli autovalori risultano essere $3, 1+k, 1-k$.

b) Data la quadrica $\sigma_k : x^2 + 3y^2 + z^2 + 2kxz + 1 = 0$, dipendente dal parametro k, stabilire per quali valori essa è generale. Per tali valori, determinarne la forma canonica al variare del parametro k.

Soluzione. La matrice della quadrica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la parte principale è proprio la matrice Q *della parte a). Poiche'* $\det A = 3(1-k^2)$ *la quqdrica è generale se e solo se* $k \neq 1, k \neq -1$*. Dal teorema di riduzione sappiamo che la forma canonica è del tipo*

$$3X^2 + (1+k)Y^2 + (1-k)Z^2 + p = 0,$$

con $p \in \mathbf{R}$*. Sapendo che* $\det A = 3(1-k^2)$ *e che il determinante della matrice della quadrica nel riferimento canonico è* $\det \tilde{A} = 3p(1-k^2)$ *ricaviamo* $p = 1$ *dunque la forma canonica*

$$3X^2 + (1+k)Y^2 + (1-k)Z^2 + 1 = 0.$$

Classifichiamo la quadrica al variare di k*. Si vede che, se* $-1 < k < 1$ *i tre autovalori sono positivi, e dunque la quadrica è un ellissoide immaginario. Se* $k > 1$ *oppure* $k < -1$*, ci sono due autovalori positivi e uno negativo. Dal segno del termine noto si evince che la quadrica è un iperboloide ellittico (a due falde).*

c) Determinare ora i valori di k per i quali σ_k è degenere, e stabilire se σ_k è una superficie regolare in tutti i suoi punti oppure no. Stabilire infine se σ_k è una superficie rigata oppure no.

Soluzione. Sappiamo che la quadrica è degenere se e solo se $k = 1$ oppure $k = -1$. Nel primo caso la forma canonica diventa

$$3X^2 + 2Y^2 + 1 = 0$$

mentre nel secondo diventa

$$3X^2 + 2Z^2 + 1 = 0.$$

È evidente che in entrambi i casi abbiamo una quadrica immaginaria (cioè priva di punti reali), precisamente, un cilindro immaginario.

Infine, dalla discussione appena svolta notiamo che σ_k non è mai una superficie rigata, poiche' σ_k è una quadrica immaginaria oppure è un iperboloide ellittico (che evidentemente non è una rigata).