Geometria Differenziale gennaio 2017

**Prova scritta di Geometria Differenziale 17.01.2017**
**Ingegneria Meccanica, a.a. 2016-2017**

Cognome ..................................... Nome .....................................

*L'esame consiste di quattro esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Non saranno accettati fogli di brutta copia.*

**Esercizio 1** Sia $f = f(u_1, u_2)$ una superficie parametrizzata regolare definita su un aperto $\Omega$ di $\mathbf{R}^2$, e si ponga $\Sigma = f(\Omega)$.
a) Spiegare cosa significa che la parametrizzazione $f$ è regolare, definire il piano tangente $T_p\Sigma$ alla superficie nel suo punto $p = f(u_1, u_2)$ e trovare una base di $T_p\Sigma$.

b) Definire il versore normale $N$ e l'operatore di Weingarten $W$. Dimostrare che $W$ trasforma vettori di $T_p\Sigma$ in vettori di $T_p\Sigma$.

c) Definire le curvature principali nel punto $p$, la curvatura gaussiana e la curvatura media. Inoltre dare una formula della curvatura gaussiana in funzione delle matrici della prima e seconda forma fondamentale.

**Esercizio 2** Si consideri la curva

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \phi(t) \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

dove $\phi(t)$ è una funzione positiva di $t$.
a) Calcolare la curvatura di $\alpha$ per un generico valore di $t$.

b) Sia $M$ una matrice ortogonale. Calcolare la curvatura della curva $\beta(t) = M\alpha(t)$.

c) Calcolare curvatura e torsione di $\alpha$ in $t$ se $\phi(t) = 2t + 3$.

**Esercizio 3** Si consideri la superficie ottenuta ruotando la curva $x = \dfrac{1}{z}$ del piano $xz$ intorno all'asse $z$ (si assuma $z > 0$).
a) Parametrizzare $\Sigma$, inoltre determinare il versore normale e il piano tangente a $\Sigma$ nel suo punto $(1, 0, 1)$. Dato $a > 0$, scrivere l'integrale che esprime l'area della regione $\Sigma_a \subseteq \Sigma$ definita dalle disuguaglianze $a < z \leq 1$, e stabilire se $\Sigma_a$ ha area finita oppure no quando $a \to 0$.

b) Si consideri il parallelo $\Gamma_c : z = c$, dove $c > 0$ è costante. Determinare gli eventuali valori di $c$ per i quali $\Gamma_c$ è una geodetica di $\Sigma$. Determinare inoltre i valori che puo' assumere il valore assoluto della curvatura geodetica di $\Gamma_c$.

c) Sia ora $\alpha$ la geodetica uscente da $p \in \Gamma_1$, diretta nel verso delle $z$ crescenti, che forma con il parallelo $\Gamma_1$ un angolo di $\frac{\pi}{6}$ radianti. Calcolare la quota massima raggiunta da $\alpha$.

**Esercizio 4** a) Determinare gli autovalori della matrice $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 3 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$, dipendente dal parametro reale $k$.

b) Data la quadrica $\sigma_k : x^2 + 3y^2 + z^2 + 2kxz + 1 = 0$, dipendente dal parametro $k$, stabilire per quali valori essa è generale. Per tali valori, determinarne la forma canonica al variare del parametro $k$.

c) Determinare ora i valori di $k$ per i quali $\sigma_k$ è degenere, e stabilire se $\sigma_k$ è una superficie regolare in tutti i suoi punti oppure no. Stabilire infine se $\sigma_k$ è una superficie rigata oppure no.