Geometria Differenziale

Prova scritta di Geometria Differenziale 18.03.2016
Ingegneria Meccanica, a.a. 2015-2016

Cognome .... Nome ....

L'esame consiste di quattro esercizi, e ha la durata di due ore e trenta minuti. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Risposte senza spiegazione non riceveranno credito. Non saranno accettati fogli di brutta copia.

Esercizio 1 È data la curva dello spazio $\alpha : [0, \infty] \to \mathbf{R}^3$ definita da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 1 - e^{-t} \\ \sin t \end{pmatrix}$.

a) Determinare la curvatura $k(t)$ di α al variare di $t \in [0, \infty]$ e calcolare $\lim_{t\to\infty} k(t)$ (se tale limite esiste).

b) Sia π_t il piano osculatore di α in t. È vero che π_t tende a un piano limite quando $t \to \infty$? Quale ?

c) Dopo aver osservato che la traccia di α è interamente contenuta nel cilindro Σ, di equazione $x^2 + z^2 = 1$, determinare la curvatura geodetica di α in quanto curva di Σ, e stabilire se α è una geodetica di Σ.

Esercizio 2 a) Sia $\alpha : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ una curva regolare del piano parametrizzata dall'ascissa curvilinea, e sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ un'isometria diretta del piano. Sia $\beta : [0, L] \to \mathbf{R}^2$ la curva ottenuta componendo α con f, ovvero la curva definita da $\beta(s) = f(\alpha(s))$ per ogni $s \in [0, L]$. Se $k_\alpha(s), k_\beta(s)$ sono, rispettivamente, la curvatura di α in s e la curvatura di β in s, dimostrare che si ha $k_\alpha(s) = k_\beta(s)$ per ogni s.

b) Enunciare il teorema di esistenza e unicità per le curve dello spazio di curvatura e torsione assegnate. (Non è richiesta la dimostrazione).

c) Sia Σ la superficie ottenuta come grafico di una funzione $f(x, y)$, ovvero la superficie di equazione cartesiana $z = f(x, y)$. Parametrizzare Σ, e determinare il versore normale in ogni suo punto.

Esercizio 3 a) Determinare gli autovalori della matrice $Q = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix}$ dipendente dal parametro reale k.

b) Data la quadrica

$$\sigma_k : 3x^2 + y^2 + z^2 + 2kyz + 1 = 0$$

dipendente dal parametro k, stabilire per quali valori essa è generale. Per tali valori determinarne la forma canonica al variare del parametro k.

c) Per quali valori di k la quadrica σ_k è una superficie di rotazione ?

Esercizio 4 a) Sia Γ la circonferenza contenuta nel piano xz, avente raggio unitario, e avente centro nel punto sull'asse x a distanza $d > 0$ dall'origine. Parametrizzare Γ.

b) Sia Σ il toro ottenuto ruotando intorno all'asse z la circonferenza Γ del punto a). Dire per quali valori di d tale superficie è regolare; calcolarne il versore normale e l'area totale.

c) Calcolare la matrice dell'operatore di Weingarten, le curvature principali, la curvatura media e la curvatura gaussiana.

d) Dire per quali valori di d la curvatura media non cambia mai di segno (ovvero, è sempre positiva, oppure sempre negativa). Calcolare, il valore massimo $K_{\max}$ e il valore minimo $K_{\min}$ della curvatura gaussiana, e dire in quali punti tali valori sono raggiunti.

Breve formulario.

1. Ricordiamo che un'isometria del piano si scrive $f(x) = Ax + b$ dove A è una matrice ortogonale 2×2 e $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ è un vettore fissato, detto vettore di traslazione. In altre parole, se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ possiamo scrivere

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

2. Se $\alpha = \alpha(s)$ è una curva piana, parametrizzata dall'ascissa curvilinea, allora il versore tangente è $T(s) = \alpha'(s)$, il versore normale è $N(s) = JT(s)$, dove $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, e la curvatura $k(s)$ è definita dalla relazione

$$T'(s) = k(s)N(s).$$

2. Sia $\alpha : I \to \mathbf{R}^3$ una curva biregolare parametrizzata da t (non necessariamente l'ascissa curvilinea). Allora si ha:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \quad \tau(t) = -\frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t)\rangle}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}$$

3. La curvatura geodetica e la curvatura normale di una curva $\alpha(t)$ contenuta nella superficie Σ, non necessariamente parametrizzata dall'ascissa curvilinea, sono date, rispettivamente, da

$$\begin{cases} k_g(t) = \dfrac{1}{v(t)^3}\det(\alpha'(t), \alpha''(t), N_\Sigma) \\ k_n(t) = \dfrac{1}{v(t)^2}\langle \alpha''(t), N_\Sigma\rangle \end{cases}$$

dove $v(t) = |\alpha'(t)|$ e dove N_Σ denota il versore normale della superficie Σ.