Secondo test di Geometria
Ing. Meccanica a.a. 2017-18

Il test consiste di sei esercizi, e ha la durata di tre ore. Rispondere negli spazi predisposti, e giustificare le risposte in modo chiaro e conciso (se occorre, usare il retro del foglio). Il test sara' discusso in aula martedi 19 dicembre ore 9-11 e giovedi 21 dicembre ore 9-11.

Esercizio 1 È data la conica $\gamma : 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 8x + 3 = 0$.

a) Verificare che la conica è un'ellisse e determinarne la forma canonica.

b) Siano F_1, F_2 i fuochi dell'ellisse γ. Calcolare l'area massima di un triangolo di vertici F_1, F_2, P, dove $P \in \gamma$ (per l'ellisse in forma canonica $\dfrac{X^2}{a^2} + \dfrac{Y^2}{b^2} = 1$ con $a \geq b$ le coordinate dei fuochi sono date da $\pm(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$).

c) Siano Q_1, Q_2 le intersezioni di γ con l'asse x. Calcolare il perimetro di ciascuno dei due triangoli di vertici, rispettivamente, F_1, F_2, Q_1 e F_1, F_2, Q_2.

Esercizio 2 Nello spazio sono dati i punti $A = (1, 1, 1), B = (2, 0, 1)$ e il piano $\pi : x+y+z = 0$. Determinare:

a) L'equazione del piano α passante per A e B, e perpendicolare al piano π.

b) L'equazione della sfera di centro A tangente al piano π e le coordinate del punto di tangenza.

c) Sia A' (rispettivamente, B') la proiezione ortogonale di A (risp. B) sul piano π. Calcolare l'area del quadrilatero $ABA'B'$, e stabilire se tale quadrilatero è un rettangolo oppure no.

Esercizio 3 Data $\mathcal{BC} = (e_1, e_2, e_3)$, base canonica di $\mathbf{R}^3$, si considerino i vettori v_1, v_2, v_3 tali che:

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 \\ v_2 = e_2 + e_3 \\ v_3 = e_3 \end{cases}$$

a) Esprimere e_1, e_2, e_3 in funzione di v_1, v_2, v_3.

b) Stabilire se $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbf{R}^3$; in tal caso determinare la matrice di passaggio M da $\mathcal{BC}$ a $\mathcal{B}$ e la sua inversa M^{-1}.

c) Determinare la dimensione dei sottospazi E, F di $\mathbf{R}^3$ definiti come segue:

$$E = L[v_2, v_3, e_1, e_3], \quad F = L[e_2, e_3] \cap L[v_2, v_3].$$

Esercizio 4 Data $\mathcal{BC} = (e_1, e_2, e_3)$, base canonica di $\mathbf{R}^3$, si considerino i vettori v_1, v_2, v_3 dell'esercizio precedente, cioè tali che:

$$\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 \\ v_2 = e_2 + e_3 \\ v_3 = e_3 \end{cases}$$

e sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ avente autovettori v_1, v_2, v_3, associati rispettivamente agli autovalori $0, 2, 2$.

a) Determinare una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $(\mathrm{Ker} f)^{\perp}$.

b) Stabilire se f è diagonalizzabile, e calcolare $f(v_1 + v_2 + v_3)$.

c) Determinare la matrice canonica A di f e stabilire se A è simile alla matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (si possono usare i risultati dell'esercizio precedente).

Esercizio 5 Sono dati i seguenti vettori di $\mathbf{R}^4$, dipendenti dal parametro h:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h-1 \\ h^2-1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ h-1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & h-1 & h-1 \\ 0 & h^2-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcolare il rango di A al variare di h.

b) Calcolare la dimensione del sottospazio $E_h = L[v_1, v_2, v_3]$ al variare di h.

c) Determinare, se possibile, un sottospazio F di $\mathbf{R}^4$ tale che si abbia

$$\dim F = 2, \quad F \cap E_h = \{0\}, \quad \text{per ogni} \quad h \in \mathbf{R}$$

(E_h è, ovviamente, il sottospazio del punto precedente, cioè il sottospazio generato da v_1, v_2, v_3).

Esercizio 6 Sia T l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ rappresentato dalla matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ rispetto alla base canonica.

a) Determinare una base di $\mathrm{Ker}T$ e una base di $\mathrm{Im}T$.

b) Scrivere il polinomio caratteristico di A e stabilire se T è diagonalizzabile.

c) Sia ora A' la matrice associata a T rispetto alla base (w_1, w_2, w_3) dove

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Stabilire se A' è diagonalizzabile, e calcolare $\det A', \mathrm{tr}A'$.