

Corso di Geometria a.a. 2017-18

Ingegneria Meccanica - Programma

Sistemi lineari e matrici. Sistemi di equazioni lineari. Operazioni elementari sui sistemi lineari. Il metodo di eliminazione di Gauss. Proprietà delle soluzioni di un sistema lineare. Sistemi lineari omogenei.

Matrici. Matrice dei coefficienti e matrice completa di un sistema. Operazioni elementari sulle righe di una matrice, matrici a scalini. Operazioni sulle matrici: somma, prodotto per uno scalare, prodotto righe per colonne di due matrici. Proprietà. Forma matriciale di un sistema.

Determinante di una matrice quadrata. Teorema di Binet. Matrici invertibili. Calcolo della matrice inversa. Teorema di Cramer. Equazioni matriciali. Rango di una matrice. Rango per minori, teorema degli orlati. Il teorema di Rouchè-Capelli. Matrici triangolari. Matrici simmetriche e antisimmetriche. Sistemi lineari dipendenti da parametri.

Spazi vettoriali. Definizione di spazio vettoriale reale. Vettori applicati del piano e dello spazio: gli spazi vettoriali $V^2(O), V^3(O)$. Spazi vettoriali di matrici e polinomi. Lo spazio vettoriale \mathbf{R}^n . Combinazioni lineari di vettori.

Dipendenza e indipendenza lineare di vettori. Generatori di uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali finitamente generati. Basi e dimensione. Esistenza di una base. Estensione di una base. Matrice del cambiamento di base. Coordinate di un vettore rispetto a una base.

Sottospazi vettoriali. Sottospazi generati da un insieme di vettori. Somma e intersezione di sottospazi. Somma diretta. Formula di Grassmann. Dimensione di un sottospazio e rango.

Applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Nucleo e immagine. Applicazioni lineari iniettive, suriettive. Matrice associata. Applicazioni lineari assegnate su una base. Il teorema della dimensione. Endomorfismi di uno spazio vettoriale. Matrice associata ad un endomorfismo rispetto ad una base. Matrici simili. Matrici associate ad uno stesso endomorfismo sono simili.

Autovettori e autovalori di un endomorfismo. Il polinomio caratteristico di una matrice e di un endomorfismo. Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. Autospazi. Molteplicità algebrica e molteplicità geometrica di un autovalore. Endomorfismi e matrici diagonalizzabili. Basi di autovettori. Criteri di diagonalizzabilità. Procedimento di diagonalizzazione.

Il prodotto scalare in \mathbf{R}^n . Definizione di prodotto scalare in \mathbf{R}^n . Norma di un vettore. Basi ortogonali. Basi ortonormali e algoritmo di Gram-Schmidt. Matrici ortogonali e loro

proprietà. Il complemento ortogonale di un sottospazio. Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio.

Endomorfismi simmetrici. Ortogonalità degli autospazi di un endomorfismo simmetrico. Il teorema spettrale. Matrici ortogonali. Diagonalizzazione di endomorfismi simmetrici. Diagonalizzazione di matrici simmetriche.

Geometria analitica del piano. Il prodotto scalare di vettori geometrici. Distanza tra due punti. Area. Equazioni parametriche ed equazione cartesiana di una retta. Intersezione di due rette. Condizioni di parallelismo e perpendicolarità. Fasci di rette. Distanza di un punto da una retta. Circonferenze. Retta tangente ad una circonferenza.

Geometria analitica dello spazio. Il prodotto scalare di vettori geometrici. Distanza tra due punti. Area. Prodotto vettoriale. Equazioni cartesiane e parametriche di rette. Equazione cartesiana di un piano. Parametri direttori di una retta. Parallelismo e perpendicolarità di rette. Complanarità di punti. Fasci di piani. Parallelismo e perpendicolarità di piani. Vettori perpendicolari ad un piano. Condizioni di parallelismo e perpendicolarità fra una retta e un piano. Rette complanari e sghembe. Proiezione ortogonale di un punto su una retta e su un piano. Distanza di un punto da una retta e da un piano. Distanza di due rette e retta di distanza minima. Proiezione ortogonale di una retta su un piano. Sfere dello spazio. Piano tangente ad una sfera.

Trasformazioni del piano e coniche. Trasformazioni lineari del piano: rotazioni, proiezioni ortogonali, riflessioni. Formule del cambiamento di coordinate. Forme quadratiche e loro diagonalizzazione. Ellisse, iperbole, parabola e loro equazioni canoniche. Coniche. Matrici di una conica. Teorema di invarianza, teorema di riduzione. Riduzione a forma canonica e classificazione.

Testo di supporto

– A. Savo: *Appunti del Corso di Geometria* (in 12 parti).

Le dimostrazioni dei Teoremi, Proposizioni e Lemmi qui elencati sono facoltative. Saranno pero' richieste per ottenere voti dal 28 al 30.

- Parte 2: Proposizione Sez. 8 p. 17
- Parte 3: Sezione 5.1, Teorema Sez. 3.2 p. 8, Teorema Sez. 5 p. 12
- Parte 4: Lemma Sez. 8 p. 17, Lemma Sez. 8.1 p. 20
- Parte 5: Proposizione Sez. 2 p.5, Teorema Sez. 6 p. 13, Proposizione Sez. 8.2 p.19
- Parte 6: Proposizione sez. 10 p. 23.
- Parte 7: Proposizione Sez. 2 p. 4, Proposizione Sez. 6.1 p. 14, Teorema Sez. 9.2 p. 25
- Parte 8: Proposizione sez. 2.2 p. 6, Teorema Sez. 6 p. 18
- Parte 9: Omettere l'intera Sezione 3.1 (Sistema di riferimento affine)
- Parte 10: Proposizione Sez. 8.3 p. 21
- Parte 11: Proposizione Sez. 9.2 p. 26
- Parte 12: Sezioni 1.3 e 1.4, Appendice (Sezione 6).